Aix–Marseille Université 2015-2016

Algèbre linéaire 1

PLANCHE D'EXERCICES N°1

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 * Parmi les ensembles suivants, reconnaître les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}; \quad B = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : 3x - y = 0\}; \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\};$$
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}; \qquad E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 4z = 0\};$$
$$F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0\big\}; \quad G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \leq y \leq z\big\};$$
$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}; \qquad K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}.$$

Exercice 2 * Les ensembles suivants, sont-ils des sous-espaces vectoriels des espaces ambiants, munis des lois usuelles ?

$$E_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z\}; \qquad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\};$$
$$E_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}; \qquad E_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\};$$
$$E_5 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P = 0 \text{ ou } P' = 3\}; \qquad E_6 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est croissante}\};$$
$$E_7 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est surjective}\} \cup \{f = 0\}; \quad E_8 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(\mathbb{R}) \text{ est un ensemble fini}\};$$
$$E_9 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid 0 \in f(\mathbb{R})\}; \qquad E_{10} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid 2f(a) = f(b)\}.$$

Exercice 3 Considérons deux sous ensembles de $M_2(\mathbb{R})$ suivants :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sont-ils des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$?

Exercice 4 * Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que $V \cap W$ et $V \cup W$ sont toujours des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$?

2 Familles libres

Bien que la notation standard soit en colonnes, nous allons donner les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en lignes pour gagner de place sur la planche.

Exercice 5 * Est-ce que les vecteurs suivants forment une famille libre dans l'espace $\mathbb{R}^n$ correspondant ?

1. $(2,1), (6,3) \in \mathbb{R}^2$; 2. $(7,11), (11,7) \in \mathbb{R}^2$; 3. $(1,1), (3,-5), (-6,5) \in \mathbb{R}^2$;
4. $(1,0,0), (1,2,0), (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$; 5. $(1,1,1), (3,2,1), (6,5,4) \in \mathbb{R}^3$; 6. $(1,1,1), (1,2,3), (1,3,6) \in \mathbb{R}^3$;
7. $(1,1,1,1), (1,2,3,4), (1,4,7,10) \in \mathbb{R}^4$; 8. $(1,2,1,2,1), (2,1,2,1,2), (1,0,1,1,0), (0,1,0,0,1) \in \mathbb{R}^5$.

Exercice 6 * Considérons $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ avec $u_1 = 0$. Est-ce que ces vecteurs forment une famille libre ?

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel réel. Démontrer que :

1. Deux vecteurs $u, w \in E$ sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas colinéaires.

2. Les vecteurs non nuls $u_1, \ldots, u_n \in E$ sont linéairement indépendants si et seulement si $u_{i+1} \notin \text{Vect}\{u_1, \ldots, u_i\}$, pour tout $i = 1, \ldots n-1$.

Exercice 8 * Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.

2. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?

Exercice 9 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer parmi les familles suivantes celles qui sont libres et celles qui sont liées.

1. $\{2, 4\sin^2 x, \cos^2 x\}$, 2. $\{x, e^x\}$, 3. $\{\sin x, \cos x\}$, 4. $\{(1+x)^2, x^2+2x, 3, x\}$, 5. $\{0, x, x^2\}$,

6. $\{\cos(2x), \sin^2 x, \cos^2 x\}$, 7. $\{1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}\}$, 8. $\{1, \sin x, \sin(2x), \ldots, \sin(nx)\}$.

Exercice 10 * Soient $E = \text{Vect}\{(2, 3, -1), (1, -1, 2)\}$ et $F = \text{Vect}\{(3, 2, 1), (1, 4, -3)\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E = F$.

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel réel. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse :

1. Une famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dans E est libre si et seulement si la famille $\{\sum_{j=1}^{i} v_j : i = 1, \ldots n\}$ est libre.

2. Si $v_1, v_2, v_3, v_4 \in E$ et $\sum_{j=1}^{4} v_i = 0$, alors $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}$.

3. Si $v, u, w \in E$ et $w \notin \text{Vect}\{v, u\}$, alors $\text{Vect}\{v, u\} \cap \text{Vect}\{v, w\} = \text{Vect}\{v\}$.

Exercice 12 Soient e_1, e_2, e_3 des vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel réel X. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ les vecteurs $e_1 + ae_2$, $e_2 + ae_3$, $e_1 + ae_3$ sont linéairement indépendants ?

Exercice 13 Soit E l'espace vectoriel réel des suites de nombres réels, muni des lois usuelles suivantes :

$$\forall (x_n), (y_n) \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n), \qquad \lambda \cdot (x_n) = (\lambda x_n).$$

Considérons le sous-ensemble $F \subset E$ des suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Monter que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de F.

3. Montrer que tout élément de F est déterminée par ses deux premiers termes. En déduire que

$$F = Vect\{(a_n), (b_n)\},$$

c'est-à-dire que F est un plan vectoriel de E.

4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n) \in F$ vérifiant $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

3 Bases et dimension

Exercice 14 * Vérifier que la famille ($(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$) engendre $\mathbb{R}^3$ tout entier. Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 15 * Montrer que les vecteurs suivants :

$$v_1 = (0, 1, 1, 1),\ v_2 = (1, 0, 1, 1),\ v_3 = (1, 1, 0, 1),\ v_4 = (1, 1, 1, 0),$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$. Dans cette base, calculer les coordonnées des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 ainsi que celles de $u = (1, 1, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 0, 0)$.

Exercice 16 * Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants constituent-ils une base ?

1. $x_1 = (1, -1, 0), \qquad x_2 = (1, 0, 1), \qquad x_3 = (1, 2, 3).$
2. $x_1 = (1, 0, -1), \qquad x_2 = (0, 1, 0), \qquad x_3 = (1, 1, 0).$
3. $x_1 = (1, 2, 3), \qquad x_2 = (2, 3, 1), \qquad x_3 = (0, 0, 0).$
4. $x_1 = (1, 0, 0), \qquad x_2 = (1, 1, 0), \qquad x_3 = (1, 1, 1).$
5. $x_1 = (1, 1, -1), \qquad x_2 = (1, -1, 1), \qquad x_3 = (-1, 1, 1).$

Exercice 17 Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Le cas échéant calculer leurs dimensions.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x + y - z = x + y + z = 0\}, \quad E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x^2 - z^2 = 0\},$$
$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ e^x e^y = 0\}, \quad E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z(x^2 + y^2) = 0\}.$$

Exercice 18 Donner une description géométrique de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ puis de $\mathbb{R}^3$ (raisonner selon la dimension de ceux-ci).

Exercice 19 * Considérons l'ensemble

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base et en déduire sa dimension.

Exercice 20 Montrer que l'ensemble $S = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. Trouver une base de S et en déduire sa dimension.

Exercice 21 Soit la famille de polynômes $(X^3, X^2(X - 1), X(X - 1)^2, (X - 1)^3)$. Montrer qu'elle engendre $\mathbb{R}_3[X]$. Justifier que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Trouver les coordonnées du vecteur $P = 2X^3 + X + 2$ dans cette base.

Exercice 22 Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n. Montrer que P et ses n dérivées forment une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 23 *

1. Montrer que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

est une base de l'espace des matrices carrées réelles d'ordre 2. En déduire la dimension de cet espace.

2. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n.
3. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n diagonales.
4. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n symétriques.
5. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures.

Exercice 24 * Dans un espace vectoriel réel E de base (e_1, e_2, e_3), les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ?

1. $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1\}$,
2. $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$,
3. $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_1\}$,
4. $\{e_1 + 2e_2, e_2 + 2e_3, e_3 + 2e_1\}$,
5. $\{e_1 + e_2, e_2 - 2e_3\}$,
6. $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + e_2 - e_3\}$.

4 Somme directe, sous-espaces supplémentaires

Exercice 25 * Montrer que $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera une base. Même question avec $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z \text{ et } x = 0\}$. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Exercice 26 * Soient x, y, u, v des éléments de $\mathbb{R}^4$. On note M et N les sous espaces vectoriels engendrés respectivement par $\{x, y\}$ et $\{u, v\}$. Quels sont les cas où $M \oplus N = \mathbb{R}^4$?

1. $x = (1, 1, 0, 0)$, $y = (1, 0, 1, 0)$, $u = (0, 1, 0, 1)$, $v = (0, 0, 1, 1)$.
2. $x = (-1, 1, 1, 0)$, $y = (0, 1, -1, 1)$, $u = (1, 0, 0, 0)$, $v = (0, 0, 0, 1)$.
3. $x = (1, 0, 0, 1)$, $y = (0, 1, 1, 0)$, $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, 0, 1)$.

Exercice 27 On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. Vect$\{v_1, v_2\}$ et Vect$\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour Vect$\{v_1, v_3, v_4\}$ et Vect$\{v_2, v_5\}$.

Exercice 28 Déterminer si les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants sont supplémentaires ou en somme directe :

1. $V_1 = Vect\{(1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$ et $V_2 = Vect\{(0, 1, 2)\}$.
2. $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$ et $V_2 = Vect\{(1, 0, -1)\}$.
3. $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$ et $V_2 = Vect\{(1, 2, 1)\}$.
4. $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0,\ x - z = 0\}$ et $V_2 = Vect\{(1, a, b)\}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 29 * Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ et $(4, 2, 0)$. Quelle est la dimension de F ? Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.