

Algèbre linéaire 1

PLANCHE D'EXERCICES N°3

1 Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 * Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants. Vérifier si la solution obtenue est correcte.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 7x + 5y = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2 * Déterminer les solutions des systèmes suivants. Décrire votre solution en termes d'intersections de plans. Il n'est pas nécessaire de faire un dessin.

$$\begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ 4x + 13y + 7z = 0 \\ 7x + 22y + 13z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ 6x + y + 4z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ 4x + 13y + 7z = 0 \\ 7x + 22y + 13z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 3 * Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 3 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 7x + 2y - 3z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ -x + 4y + 2z = 2 \\ 7x - 6y - 8z = -4 \end{cases}.$$

Exercice 4 * Ayant à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \begin{cases} 2x + 7y + z = 1 \\ 2x + 3y - 5z = 4 \\ -4x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

un étudiant démarre ainsi :

$$\begin{array}{llll} \text{j'élimine } x & \text{en retranchant } e_2 & \text{de } e_1 & : 4y + 6z = -3 \\ \text{'' } y & \text{'' } & \text{e}_3 & \text{de } e_2 : 6x - 6z = -1 \\ \text{'' } z & \text{'' } & \text{e}_1 & \text{de } e_3 : -6x - 4y = 4 \end{array}$$

Le système ainsi obtenu est-il équivalent au système initial ? Résoudre le système par la méthode de Gauss.

Exercice 5 Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = -12 \\ 3x - 5y + 13z = 18 \\ x - 2y + 5z = k \end{cases},$$

où k est un nombre arbitraire.

Pour quelles valeurs de k le système a-t-il au moins une solution ? Pour chacune de ces valeurs de k , déterminer le nombre de solutions du système. Déterminer toutes les solutions pour chaque valeur de k .

Exercice 6 Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1, p)$, $(2, q)$, $(3, r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?

Exercice 7 Résoudre les systèmes linéaires suivants selon la valeur du paramètre a :

$$(i) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + az = 2 \\ x + ay + z = 3 \end{cases}, \quad (ii) \begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ ax + ay + 3z = 1 \\ ax + ay + az = 1 \end{cases}, \quad (iii) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} (a-2)x + (2a-1)y = 2-a \\ 2x + (3+a)y = 2a \end{cases}, \quad (v) \begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x - y + az = 0 \\ x + 10y - 6z = a \end{cases}, \quad (vi) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ 8x - 5y + z = a \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 8 Résoudre en utilisant l'échelonnement les systèmes suivants :

$$(i) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \\ 6x + 3y + 2z = -4 \end{cases}, \quad (ii) \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -x + 3y = 0 \\ -2y + z = -3 \end{cases}, \quad (iii) \begin{cases} x + 2y - 2z + 4t = 2 \\ y + 3z - 4t = -2 \\ z - 2t = 0 \\ x + y - z + 2t = 2 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} x - y + z - t + w = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \\ 2x - 2y + 3z - t + 2w = 0 \\ 4x - 2y + 6z - 3t + 3w = 0 \end{cases}, \quad (v) \begin{cases} x + 2y - 2z + 4t + u = 0 \\ y + 3z - 4t + 2u = 0 \\ x + z - 2t + 3u = 0 \\ x + y + 4z - 6t + 5u = 0 \\ 3y + 2t = 0 \end{cases}$$

2 Echelonnement d'une matrice, rang, calcul de l'inverse

Exercice 9 * Échelonner les matrices suivantes, trouver leur rang et dire si elles sont inversibles. Le cas échéant calculer leurs inverses par échelonnement total :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 * Pour quelles valeurs du paramètre t , la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1+t & -1 & 2 \\ 2 & -t & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 * Trouver le rang des matrices suivantes.

$$(i) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad (iii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 Trouver le rang des matrices suivantes en fonction de la valeur du paramètre p .

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & p & -1 & 2 \\ 2 & -1 & p & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ p & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3 Application de l'échelonnement aux familles de vecteurs

Exercice 13 * Vérifier que les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels, respectivement de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{R}^4 , en déterminer des bases et en déduire leurs dimensions.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0 \text{ et } x = y\} \\ H &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z - t = 0\} \\ K &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0 \text{ et } x + y + z + t = 0\} \end{aligned}$$

Exercice 14 Considérons la famille de vecteurs de \mathbb{R}^4 suivante

$$v_1 = (1, -1, 0, 2), \quad v_2 = (1, 0, 1, 2), \quad v_3 = (1, 3, 5, 7), \quad v_4 = (0, 2, 3, \alpha),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de α la famille forme une base de \mathbb{R}^4 ?

2. Dans le cas où la famille est liée, déterminer toutes les relations linéaires liant ces vecteurs. Quelle est la dimension de l'espace engendré ?

3. Soit $v = (-2, k, 1, 3)$. Pour quelles valeurs de k a-t-on $v \in \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$? Dans ce cas, déterminer les composantes du vecteur v dans une base de $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Exercice 15 *

Quel est le rang des familles de vecteurs suivantes ? Sont-elles libres ? Donner une équation du sous-espace engendré.

1. $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (0, 1, 1)$.

2. $v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (1, 1, 0, 0), v_3 = (0, 1, 1, 0), v_4 = (0, 0, 1, 1)$.

3. $v_1 = (1, 1, 0, 1), v_2 = (-1, 1, 1, 0), v_3 = (0, -1, 1, 1), v_4 = (1, 1, 1, 0)$.

4. $v_1 = (1, -1, 0, 1), v_2 = (1, 1, -1, 1), v_3 = (0, 1, 1, 1), v_4 = (1, 0, 1, 0)$.

5. $v_1 = (1, 0, 0, 2, 5), v_2 = (0, 1, 0, 3, 4), v_3 = (0, 0, 1, 4, 7), v_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

Exercice 16 * Déterminer les relations linéaires liant les vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, -1, 0, 0), \quad u_2 = (1, 0, -1, 0), \quad u_3 = (1, 0, 0, -1),$$

$$u_4 = (0, 1, -1, 0), \quad u_5 = (0, 1, 0, -1), \quad u_6 = (0, 0, 1, -1).$$

Trouver le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants parmi ces vecteurs.

Exercice 17 Répondre aux questions de l'exercice précédent dans le cas des vecteurs $P_1 = X^3 + 4X^2 - 2X + 3$, $P_2 = 2X^3 + 10X^2 - 3X + 7$ et $P_3 = 2X^3 + 4X^2 - 6X + 4$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 18 * Déterminer la dimension des sous espaces vectoriels engendrés par chacune des 2 familles de vecteurs ci-dessous. Donnez en une base et exprimer les coordonnées de chacun des vecteurs de la famille dans la base trouvée.

1. $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (2, 3, 4, 5), v_3 = (3, 4, 5, 6), v_4 = (4, 5, 6, 7), v_5 = (5, 6, 7, 8)$.

2. $w_1 = (1, 3, 0, -1), w_2 = (1, 2, 3, 0), w_3 = (0, -1, 0, 4), w_4 = (1, 0, 0, -13)$.

Exercice 19

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on considère la famille de vecteurs suivante :

$$(1, 1, \alpha), (1, \alpha, 1), (\alpha, 1, 1).$$

Déterminer en fonction de α le rang de cette famille de vecteurs.