Aix–Marseille Université 2015-2016

Algèbre Linéaire 1

PLANCHE D'EXERCICES N°4.1

# 1 Applications linéaires

Exercice 1 *

1. Déterminer parmi les applications suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, celles qui sont linéaires :

1. $p_1(x,y) = x, \;\; p_2(x,y) = y,$
2. $f_1(x,y) = xy, \;\; f_2(x,y) = x+y, \;\; f_3(x,y) = x+y+1, \;\; f_4(x,y) = x^2 - y^2,$
3. $f_5(x,y) = |x+y|, \;\; f_6(x,y) = \sin x, \;\; f_7(x,y) = x - 3y.$

2. Déterminer parmi les applications suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, celles qui sont linéaires :

$$g_1(x,y) = (y,x), \;\; g_2(x,y) = (x,y^2), \;\; g_3(x,y) = (1,x).$$

Exercice 2 Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de $E$.

Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\mathcal{B}} : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \end{array} , \forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans $E$.

Exercice 3 Soit $E$ un espace vectoriel et $v_0 \in E$. Montrer que l'application translation $t_{v_0}$ définie par

$$\begin{array}{rccc} t_{v_0} : & E & \longrightarrow & E \\ & v & \mapsto & v + v_0, \end{array}$$

est un endomorphisme de $E$ si et seulement si $v_0 = 0$.

Exercice 4 * Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ et $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $u_1, \ldots, u_n \in E$ et $v_i = f(u_i)$, pour $i = 1, \ldots, n$. Montrer que si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée alors $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée. Quelle est la contraposée de cette proposition ? La réciproque de cette proposition, est-elle vraie ?

Exercice 5 Soit $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il n'existe aucune application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que :

$$f(v_1 + v_3) = v_1, \; f(v_2 + v_4) = v_2, \; f(v_1 + v_2) = v_3, \; f(v_3 + v_4) = v_4.$$