Aix–Marseille Université 2015-2016

Algèbre Linéaire 1

PLANCHE D'EXERCICES N°4.2

1 Applications linéaires : noyau et rang

Exercice 1 * Déterminer le noyau et l'image (base et dimension) de chacune des applications linéaires f suivantes :

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (3x + y, x - y)$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (z, y, 0)$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y, x + 2y)$.

Exercice 2 * Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que, si $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ désignent les vecteurs de la base canonique, on ait :

$$f(\boldsymbol{e}_1) = (1, 1), \qquad f(\boldsymbol{e}_2) = (0, 1), \qquad f(\boldsymbol{e}_3) = (-1, 1).$$

Trouver une base de Ker(f). Déterminer un supplémentaire de Ker(f) dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à I$m(f)$ (c.à.d qu'il existe un isomorphisme, i.e. une application linéaire bijective du supplémentaire de Ker(f) dans I$m(f)$).

Quelle est l'image réciproque du vecteur $(1, 0)$?

Quelle est l'image réciproque du sous espace vectoriel engendré par $(1, 0)$?

Exercice 3 On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^6$ donnée par :

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0,0) & = & (-1,-1,-1,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) & = & (1,0,0,-1,-1,0) \\ f(0,0,1,0) & = & (0,1,0,1,0,-1) \\ f(0,0,0,1) & = & (0,0,1,0,1,1) \end{array}$$

Déterminer l'image d'un vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbb{R}^4$, c'est à dire exprimer le vecteur $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^6$ en fonction de x_1, x_2, x_3 et x_4. Déterminer le rang de f.

Exercice 4 On considère les espaces vectoriels réels : $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$.

a) Soit $\Psi : E \to F$ définie par $\forall P \in E$, $\Psi(P) = P'$ (polynôme dérivé). Montrer que Ψ est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

b) Soit $\Phi : F \to E$ définie par $\forall P \in F,\ \Phi(P)(x) = \displaystyle\int_0^x P(t)dt$. Montrer que Φ est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

c) Calculer $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.

Exercice 5 Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ définie par

$$f(A) = AM - MA.$$

Montrer que f est linéaire. Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$.

Exercice 6 Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Montrer que f est injective si et seulement si l'image de toute famille libre de vecteurs de E forme une famille libre de vecteurs de F.

2. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

3. Supposons que f soit bijective. Que peut-on dire des dimensions de E et F ?

Exercice 7 * Donner une application linéaire dont le noyau est le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 * Donner une application linéaire dont le noyau est la droite engendrée par le vecteur $(-1, 1, 2)$.

Exercice 9 * Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires telles que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{I}m(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 10 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{I}m(f).$$

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E. Supposons que pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.

i) Montrer que si $x \in E$, $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

ii) Quand (x, y) est libre, comparer λ_x, λ_y et λ_{x+y}.

iii) Montrer que f est une homothétie.

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire non nulle. On note $H = \mathrm{Ker}(f)$.

i) Montrer que $\mathrm{I}m(f) = \mathbb{R}$.

ii) Soit $x_0 \in E \backslash H$ et posons $F = \mathrm{V}ect(x_0)$. Montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 13 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

i) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{I}m(g)$ (Indication : écrire $x = x - y + y$ avec $y = g \circ f(x)$).

ii) Montrer que $f(\mathrm{I}m(g)) = \mathrm{I}m(f)$.