Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2015/2016

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1^{er} semestre ☒ $2^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence de Mathematiques et Informatique
Code du module : SIM2U2 Libellé du module : Algebre lineaire 1
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1. Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Citer le théorème du rang.
2. Soient E, F deux K-espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans F.
   Montrer que $Ker(f) = \{0_E\}$ si et seulement si f est injective.
3. Soient E un K-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Donner la définition d'un supplémentaire de F dans E.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs

$$v_1 = (1,2,1,3) \quad v_2 = (3,1,2,1) \quad v_3 = (1,2,0,1) \quad v_4 = (0,5,0,6)$$

et on note

$$E = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par ces quatre vecteurs.

1. Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une famille liée ; en extraire une base de E. Quelle est la dimension de E ?
2. Donner une équation (ou des équations) de E. (*Rappel : elles sont de la forme :* $ax + by + cz + dt = 0$)
3. Donner un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$, et en donner une base.

Exercice 3. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x,y,z) = (x + 2y - z, 2x - y + 3z, -x + y - 2z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Ecrire $A = M_B(f)$ la matrice de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base du noyau et de l'image de f. En déduire leurs dimensions.
4. L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
5. On considère maintenant les trois vecteurs suivants :

$$X_1 = (1,-1,1) \quad X_2 = (1,1,-1) \quad X_3 = (-1,1,1).$$

   (a) Montrer qu'ils forment une base B' de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique à la base B'.
   (c) Calculer l'inverse de la matrice P.
   (d) En déduire la matrice $A' = M_{B'}(f)$ qui représente l'application f dans cette nouvelle base (au départ et à l'arrivée). Donner une relation entre A et A'.
   (e) Soit $X \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées (x', y', z') dans la base B'. Déterminer les coordonnées de $f(X)$ dans la base B' en fonction de (x', y', z').

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, et f un endomorphisme de E.
On considère l'ensemble $F = \{x \in E : f(x) = x\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $f \circ f = f$, alors $F = Im(f)$.
3. Montrer que si $f \circ f = f$, alors $E = Ker(f) \oplus F$.