Aix-Marseille Université	2015-2016

Algèbre Linéaire

Partiel 2 - 25 Mars 2016

Durée : 2 heures. Sans documents ni calculatrices

Exercice 1.

1. Rappeler les définitions de matrice inversible et de la transposée d'une matrice.

   Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On dit que A est inversible *s'il existe une matrice carrrée $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. On appelle B* l'inverse de A *et on la note A^{-1}.*

   Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle transposée de A *la matrice de $M_{n\times m}(\mathbb{K})$, notée A^t, dont la i-ème ligne coïncide avec la i-ème colonne de A pour tout $i = 1, \ldots, n$. De façon équivalente, la j-ème colonne de A^t coïncide avec la j-ème ligne de A pour tout $j = 1, \ldots, m$.*

2. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $AB = BA$ et A est inversible, alors $(A^{-1})B = B(A^{-1})$.

   En multipliant les deux membres de l'égalité $AB = BA$ à droite et à gauche par A^{-1} on obtient $A^{-1}ABA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1}$. En tenant compte du fait que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ et en simplifiant, on obtient $BA^{-1} = A^{-1}B$ ce qui montre bien que A^{-1} et B commutent.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} par la méthode du pivot de Gauss (justifier lors de l'échelonnement l'inversibilité de A).

Les opérations élémentaires suivantes sur les lignes $[L_1, L_2 - 2L_1, L_3, L_4 - L_1]$, $[L_1, L_2, L_3 - L_2, L_4]$, $[L_1, L_2, L_4, L_3]$, $[L_1, L_2, L_3, L_4 + 3L_3]$ permettent d'obtenir une matrice échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice a autant de pivots que de lignes et colonnes : son rang est donc maximal et elle est ainsi inversible. On peut échelonner totalement la matrice avec les opérations élementaires sur les lignes suivantes : $[L_1, L_2, -L_3, L_4/3]$, $[L_1 - L_4, L_2 + L_4, L_3, L_4]$, $[L_1 - L_3, L_2 + 2L_3, L_3, L_4]$. Les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de la matrice identité donnent l'inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donner le rang de ce système de vecteurs et déterminer une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. A-t-on $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \mathbb{R}^4$?

Pour répondre à la question on peut procéder de deux façons différentes.

Première méthode. *On considère la matrice dont les vecteurs donnés sont les lignes et on l'échelonne en utilisant des opérations élementaires sur les lignes ; les lignes non nulles après échelonnement seront alors une base de* $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *et leur nombre sera par définition le rang de la famille. Les opérations suivantes permettent d'échelonner la matrice :* $[L_2, L_3, L_4, L_1]$, $[L_1, L_2-3L_1, L_3-2L_1, L_4-2L_1]$, $[L_1, -L_2/5, L_3, L_4]$, $[L_1, L_2, L_3L_4+4L_2]$. *La matrice échelonnée a trois lignes non nulles :*

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix},$$

elles sont une base de $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *qui a donc dimension* 3 *et ne peut pas être égal à* $\mathbb{R}^4$.

On peut aussi mettre les vecteurs en colonne mais dans ce cas il faudra faire des opérations élémentaires sur les colonnes afin de ne pas changer l'espace engendré par les colonnes.

Deuxième methode. *On cherche les relations satisfaites par les quatre vecteurs :* $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = 0$. *Cela donne un système homogène dont la matrice associée a* v_1, v_2, v_3 *et* v_4 *comme vecteurs colonne. Les solutions du système sont* $(-5x_3/2, -x_3/2, x_3, 0)$ *et on voit que* $v_3 = 5v_1/2 + v_2/2$. *Il en suit qu'on peut prendre* (v_1, v_2, v_4) *comme base de* $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Exercice 4.

1. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & +3x_4 & -4x_5 & =0\\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & =0\\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & & -3x_5 & =0\\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & -4x_5 & =0 \end{array}\right.$$

On échelonne le système avec les opérations élémentaires suivantes sur les lignes : $[L_1, L_2, L_3-L_1, L_4 - L_1]$, $[L_1, L_2, L_3 - 5L_2, L_4 - 4L_2]$, $[L_1, L_2, L_3, L_4 - L_3]$ *et on obtient*

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & +3x_4 & -4x_5 & =0\\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & =0\\ & & & 2x_4 & -4x_5 & =0 \end{array}\right.$$

On échelonne totalement grâce aux opérations élémentaires suivantes sur les lignes : $[L_1, L_2, L_3/2]$, $[L_1 - 3L_3, L_2 + L_3, L_3]$, $L_1 + 2L_2, L_2, L_3]$. *Cela donne*

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & & +x_3 & & & =0\\ & x_2 & +x_3 & & -x_5 & =0\\ & & & x_4 & -2x_5 & =0 \end{array}\right.$$

Ce qui permet d'expliciter x_1, x_2 *et* x_4 *en fonction de* x_3 *et* x_5 : $x_1 = -x_3$, $x_2 = -x_3 + x_5$ *et* $x_4 = 2x_5$.

2. Justifier que l'ensemble S des vecteurs $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$ étant solutions du système ci-dessus est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

En écrivant le système en forme matricielle $AX = 0$ *on voit aisement que : (i)* $0 \in S$ *car* $A0 = 0$ *; si* $v, u \in S$ *alors* $A(v + u) = Av + Au = 0 + 0 = 0$ *et* $v + u \in S$ *; si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $v \in S$ *alors* $A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda 0 = 0$ *et donc* $\lambda v \in S$. *Cela montre bien que* S *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^5$.

3. Donner la dimension et une base de S.

Toute solution du système donné s'écrit de la forme

$$\begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 + x_5 \\ x_3 \\ 2x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et l'écriture est unique. On en déduit que les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont une base de l'espace des solutions qui a donc dimension* 2.

Exercice 5. Soient $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que $B^n = 3^{n-1}B$ pour $n \geq 1$.

   Pour $n = 1$ on a $3^{1-1} = 3^0 = 1$ ce qui montre bien que la formule est vraie pour $n = 1$. Supposons à présent la formule vraie pour n et montrons qu'elle est alors vraie pour $n+1$. On a $B^{n+1} = B^nB = (3^{n-1}B)B = 3^{n-1}B^2$, où la deuxième égalité découle de l'hypothèse de récurrence. Or, un calcul immediat montre que $B^2 = 3B$, et il en suit $B^{n+1} = 3^{n-1}(3B) = 3^nB$, c.q.f.d..

2. Calculer BC et CB.

   On a $BC = CB = 0$.

   On admet que $C^n = 3^{n-1}C$ pour $n \geq 1$. On pose $A = \dfrac{1}{3}(B + 4C)$.

3. Grâce à la formule du binôme (justifier son utilisation), calculer A^n pour $n \geq 1$.

   On a vu que $BC = CB = 0$: les matrices B et C commutent et il est donc licite d'utiliser la formule du binôme. On a $A^n = [\frac{1}{3}(B+4C)]^n = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k4^{n-k}C^{n-k}$. En tenant compte du fait que $BC = 0$, $B^n = 3^{n-1}B$ et $C^n = 3^{n-1}C$ on obtient $A^n = [\frac{1}{3}(B + 4^nC)]$.

4. Calculer $(B + 4C)(B + I_3)$ avec I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

   On a $(B+4C)(B+I_3) = B^2 + B + 4CB + 4C = 3B + B + 4C = 4(B + C) = 12I_3$. On obtient $I_3 = [\frac{1}{3}(B+4C)][\frac{1}{4}(B+I_3)] = A[\frac{1}{4}(B+I_3)]$ ce qui montre que A est inversible et on en déduit $A^{-1} = \frac{1}{4}(B+I_3)$.