Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2016/2017

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence de Mathematiques et Informatique
Code du module : SIM2U2 Libellé du module : Algebre lineaire 1
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1.

1. Donner la définition d'application linéaire entre deux espaces vectoriels réels. **1 pt**
2. Soit E un espace vectoriel réel et soient $u, v, w \in E$ trois vecteurs tels que $u \neq w$ et $w = u + v$. Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $f : E \to E$ telle que $f(v) = v$, $f(u) = w$ et $f(w) = u$. **1,5 pt**
3. Énoncer le théorème du rang. **1 pt**
4. Existe-il une application linéaire injective $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$? Justifiez votre réponse. **1,5 pt**

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel réel et $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ une base de E. Considérons les sous-espaces vectoriels suivants de E :

$$F = \mathrm{Vect}(a + b,\ c + d) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(a - c,\ b - d).$$

1. Déterminer la dimension de F et de G. **0,5+0,5 pt**
2. Déterminer une base et la dimension de l'espace somme $F + G$. **1,5 pt**
3. Trouver un sous-espace vectoriel H de E tel que $E = (F + G) \oplus H$ en en précisant une base. **1,5 pt**
4. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$. **1 pt**

Exercice 3. Considérons la matrice $A_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & h \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A_h en fonction du paramétre h. Pour quelles valeurs de h la matrice A_h n'est pas inversible ? **1+0,5 pt**
2. Pour $h = 4$ trouver l'inverse de A_4. **1,5 pt**
3. Résoudre l'équation
$$A_4 X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
où l'inconnue X représente une matrice dont on déterminera la taille. **1 pt**

Exercice 4. Soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x - y,\ y - z,\ z - x).$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. **1 pt**
2. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de f. **1+1 pt**
3. Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = v$. Montrer que $f^{-1}(v) = \{u + w \mid w \in \mathrm{Ker}(f)\}$. En déduire $f^{-1}(1, -1, 0)$. **1+0,5 pt**
4. Considérons maintenant les vecteurs suivants
$$u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 1, -1), u_3 = (0, 0, 1).$$
Après avoir montré que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, écrire la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$. **0,5+2 pt**