Année universitaire 2016/2017

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence de Mathematiques et Informatique
Code du module : SIM2U2 Libellé du module : Algebre lineaire 1
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1.

1. Donner la définition d'application linéaire entre deux espaces vectoriels réels. **1 pt**

   Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est linéaire si pour tous $u, v \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

2. Soit E un espace vectoriel réel et soient $u, v, w \in E$ trois vecteurs tels que $u \neq w$ et $w = u + v$. Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $f : E \to E$ telle que $f(v) = v$, $f(u) = w$ et $f(w) = u$. **1,5 pt**

   Si une telle application linéaire existe elle doit satisfaire $u = f(w) = f(u+v) = f(u) + f(v) = w + v$. On en déduit que $u + v = w = u - v$, puis $v = 0$ et $w = u$ ce qui est contre l'hypothèse. Cette contradiction montre qu'une telle f ne peut pas exister.

3. Énoncer le théorème du rang. **1 pt**

   Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie égale à n. On a alors que le rang de f, à savoir la dimension de l'image de f, est égal à n moins la dimension du noyau de f.

4. Existe-il une application linéaire injective $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$? Justifiez votre réponse. **1,5 pt**

   La dimension de $\mathbb{R}_3[X]$ est 4 et celle de $\mathbb{R}^3$ est 3. Puisque l'espace cible a dimension 3, le rang de f est au plus 3. D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de f doit être positive et par conséquent f ne peut pas être injective.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel réel et $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ une base de E. Considérons les sous-espaces vectoriels suivants de E :

$$F = \mathrm{Vect}(a + b,\ c + d) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(a - c,\ b - d).$$

1. Déterminer la dimension de F et de G. **0,5+0,5 pt**

   Les sous-espaces F et G sont engendrés chacun par deux vecteurs. On en déduit que leur dimension est au plus 2. En tenant compte du fait que la famille $\mathcal{B}$ est libre on en déduit que les familles $(a + b,\ c + d)$ et $(a - c,\ b - d)$ le sont aussi et les deux sous-espaces ont dimension 2. En effet les équations $0 = \alpha(a + b) + \beta(c + d) = \alpha a + \alpha b + \beta c + \beta d$ et $0 = \gamma(a - c) + \delta(b - d) = \gamma a + \delta b - \gamma c - \delta d$ n'ont que $\alpha = \beta = 0 = \gamma = \delta$ comme solution.

2. Déterminer une base et la dimension de l'espace somme $F + G$. **1,5 pt**

   Par construction, la famille $(a+b,\ c+d,\ a-c,\ b-d)$ est une famille génératrice de l'espace somme $F + G$. La dimension de $F + G$ précisément le rang de cette famille. Considérons l'équation $0 = \alpha(a+b)+\beta(c+d)+\gamma(a-c)+\delta(b-d) = (\alpha+\gamma)a+(\alpha+\delta)b+(\beta-\gamma)c+(\beta-\delta)d$. Elle est satisfaite si et seulement si $\alpha + \gamma = \alpha + \delta = \beta - \gamma = \beta - \delta = 0$ puisque $\mathcal{B}$ est une base. On voit que cela est le cas si et seulement si $\gamma = \delta = \beta = -\alpha$. Cela donne la relation $(a + b) = (c + d) + (a - c) + (b - d)$. Par conséquence une base de $F + G$ est $(c + d,\ a - c,\ b - d)$ et sa dimenson est 3.

3. Trouver un sous-espace vectoriel H de E tel que $E = (F + G) \oplus H$ en en précisant une base. **1,5 pt**

   D'après un résultat vu en cours, il suffit de trouver un vecteur u tel que la famille $(c+d,\ a-c,\ b-d,\ u)$ soit une base de E et de choisir $H = \mathrm{Vect}(u)$. Montrons qu'on peut prendre $u = d$. Puisque E a dimension 4, il suffit de montrer que la famille $(c+d,\ a-c,\ b-d,\ u)$ est libre. Considérons l'équation $0 = \beta(c+d)+\gamma(a-c)+\delta(b-d)+\mu d = \gamma a+\delta b+(\beta-\gamma)c+(\beta+\mu)d$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base, la seule solution est $\gamma = \delta = \beta-\gamma = \beta+\mu = 0$ ce qui est équivalent à $\beta = \gamma = \delta = \mu = 0$. On en déduit que la famille est libre et donc une base.

4. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$. **1 pt**

   En utilisant la formule de dimension on a que la dimension de $F \cap G$ est égale à la somme des dimensions de F et G moins la dimension de $F + G$ donc $2 + 2 - 3 = 1$. Il en suit que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Exercice 3. Considérons la matrice $A_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & h \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A_h en fonction du paramétre h. Pour quelles valeurs de h la matrice A_h n'est pas inversible ? **1+0,5 pt**

   Les opérations suivantes $[L_2, L_1, L_3]$, $[L_1, L_2 - 2L_1, L_3 - 3L_1]$, $[L_1, L_2, L_3 - L_2]$ sur les lignes de la matrice donnent la matrice échelonnée $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & h-5 \end{pmatrix}$ qui a rang 2 si $h = 5$ et 3 sinon.

2. Pour $h = 4$ trouver l'inverse de A_4. **1,5 pt**

   Pour échelonner totalement la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, il suffit de faire les opérations élémentaires suivantes sur les lignes : $[L_1, -L_2, -L_3]$, $[L_1 - 2L_3, L_2 - L_3, L_3]$ et $[L_1 - L_2, L_2, L_3]$. Les opérations $[L_2, L_1, L_3]$, $[L_1, L_2-2L_1, L_3-3L_1]$, $[L_1, L_2, L_3-L_2]$, $[L_1, -L_2, -L_3]$, $[L_1 - 2L_3, L_2 - L_3, L_3]$ et $[L_1 - L_2, L_2, L_3]$ sur les lignes de l'identité donnent l'inverse $A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Résoudre l'équation
   $$A_4 X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
   où l'inconnue X représente une matrice dont on déterminera la taille. **1 pt**

   Pour déterminer X il suffit de multiplier les deux côtés de l'égalité à gauche par A_4^{-1}. X est la matrice avec trois lignes et deux colonnes suivante $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par
$$f(x, y, z) = (x - y,\ y - z,\ z - x).$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. **1 pt**

   On a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de f. **1+1 pt**

   On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On voit que $f(e_1+e_2+e_3) = f(e_1)+f(e_2)+f(e_3) = (e_1 - e_3) + (-e_1 + e_2) + (-e_2 + e_3) = 0$. Cela montre que le noyau contient un vecteur non nul et a dimension au moins un. Par ailleurs, les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ forment une famille libre, car il ne sont pas colinéaires, il en suit que la dimension de l'image est au moins 2. Le théoreme du rang permet de conclure que le noyau a dimension 1 et base $(e_1 + e_2 + e_3)$ et l'image a dimension 2 et base $(e_1 - e_3, -e_1 + e_2)$.

3. Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = v$. Montrer que $f^{-1}(v) = \{u + w \,|\, w \in \mathrm{Ker}(f)\}$. En déduire $f^{-1}(1, -1, 0)$. **1+0,5 pt**

   Pour cela il suffit de montrer que $f(w) = v$, à savoir $w \in f^{-1}(v)$, si et seulement si $w - u = a \in Ker(f)$. Supposons $f(w) = v$. Dans ce cas on a $f(w) = f(u)$ et par linéarite $0 = f(w)-f(u) = f(w-u)$ et on voit que $w-u = a \in Ker(f)$. Supposons maintenant que $w-u = a \in Ker(f)$. On a alors $f(w) = f(u+a) = f(u)+f(a) = v+0 = v$. Pour le vecteur $(1, -1, 0) = f(-e_2)$ on déduit que $f^{-1}(1, -1, 0)$ est l'ensemble $\{-e_2 + \alpha(e_1 + e_2 + e_3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

4. Considérons maintenant les vecteurs suivants

   $$u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 1, -1), u_3 = (0, 0, 1).$$

   Après avoir montré que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, écrire la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$. **0,5+2 pt**

   Considérons la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs donnés : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   On peut échelonner la matrice avec les opérations élémentaires suivantes sur les lignes : $[L_1, L_2, L_3 - L_1]$, $[L_1, L_2, L_3 + 2L_2]$. La matrice échelonnée a trois pivots. Cela montre que les vecteurs donnés forment une base. P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2, u_3). On peut calculer son inverse par échelonnement total ($[L_1 - L_2, L_2, L_3]$) :
   $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice de l'application f par rapport à la base (u_1, u_2, u_3) est alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.