Aix-Marseille Université	2016-2017

Algèbre Linéaire 1

Partiel 2 - 24 mars 2017

Durée : 2 heures. Sans documents ni calculatrices

Un barème, à titre indicatif, est donné en marge.

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ une matrice à n lignes et m colonnes. Notons par $\mathcal{S_A}$ l'ensemble des solutions du systeme linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, et par V_A l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A.

1. (a) Rappeler la raison pour laquelle $\mathcal{S_A}$ est un sous-espace vectoriel. Donner la dimension de l'espace vectoriel ambiant qui contient $\mathcal{S_A}$. **0,5 + 0,5 pt**

   Les propriétés de la multiplication des matrices assurent que $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ et que $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}$; de plus $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Cela implique que $\mathcal{S_A}$ est un sous-espace vectoriel. On peut aussi voir $\mathcal{S_A}$ comme intersection d'hyperplans vectoriels et donc $\mathcal{S_A}$ est un sous-espace vectoriel car intersection de sous-espaces vectoriels. On a $\mathcal{S_A} \subset \mathbb{R}^m$ donc l'espace vectoriel ambiant qui contient $\mathcal{S_A}$ a dimension m.

   (b) Quelle est la dimension de l'espace ambiant dans lequel V_A est naturellement contenu ? **0,5 pts**

   V_A est contenu dans $\mathbb{R}^n$ qui a dimension n.

   (c) Donner la formule reliant la dimension de $\mathcal{S_A}$ au rang de A. **0,5 pts**

   On a que la dimension de $\mathcal{S_A}$ est égale à m moins le rang de A.

2. Déterminer une base et la dimension pour V_A et pour $\mathcal{S_A}$, où **4 pts**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note v_i la ième colonne de la matrice. Il est immédiat de voir que la famille (v_2, v_4, v_7) est une famille libre. Par ailleurs on a $v_1 = 0v_2 + 0v_4 + 0v_7$, $v_3 = 2v_2 + 0v_4 + 0v_7$, $v_5 = 3v_2 + 5v_4 + 0v_7$, $v_6 = 4v_2 + 6v_4 + 0v_7$ ce qui montre que la famille (v_2, v_4, v_7) est aussi une famille génératrice, et donc une base de V_A. On déduit que la dimension de V_A vaut 3.

Les solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sont les vecteurs de $\mathbb{R}^7$ de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_3 - 3x_5 - 4x_6 \\ x_3 \\ -5x_5 - 6x_6 \\ x_5 \\ x_6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $x_1, x_3, x_5, x_6 \in \mathbb{R}$ sont des paramètres libres. Il en suit que $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ a dimension 4 et les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en forment un base.

Exercice 2. Soit $t \in \mathbb{R}$, on considère le système linéraire ci-dessous, d'inconnues x, y, z et w:

$$\begin{cases} - y - 3z - w = 0 \\ x - z + w = 1 \\ -x - y - z + 2w = t \\ 2y + 5z - 2w = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de t pour laquelle le système admet au moins une solution. **2 pts**

   En sommant toutes les lignes du système on obtient $0 = t+1$. Afin que le système admette une solution, il faut alors que $t = -1$.

2. Décrire l'ensemble des solutions pour la valeur de t trouvée en (1). **2 pts**

   On pose $t = -1$. Les opérations élémentaires suivantes sur les lignes permettent d'obtenir une forme totalement échelonnée : $[L_2, L_1, L_3, L_4]$, $[L_1, L_2, L_3 + L_1, L_4]$, $[L_1, L_2, L_3 - L_2, L_4 + 2L_2]$, $[L_1, L_2, L_3, L_4 + L_3]$, $[L_1, -L_2, L_3, L_4]$, $[L_1 + L_3, L_2 - 3L_2, L_3, L_4]$. Le système est équivalent à

   $$\begin{cases} x + 5w = 1 \\ y - 11w = 0 \\ z + 4w = 0 \end{cases}$$

   Les solutions sont alors les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ de la forme

   $$\begin{pmatrix} 1 - 5w \\ 11w \\ -4w \\ w \end{pmatrix}.$$

   Elles constituent une droite affine passant par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et de vecteur directeur* $\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Pour chacune des matrices suivantes: **1 + 2 + 3 pts**

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. dire si elle est inversible, en justifiant votre réponse,

2. et si elle est inversible, calculer son inverse, et sinon donner une (des) équation(s) cartésienne(s) de l'espace engendré par ses vecteurs colonnes.

Pour A_1. On voit que les vecteurs colonne de la matrice ne sont pas colinéaires. La matrice est donc inversible. On peut calculer son inverse par exemple avec la formule qui fait intervenir le déterminant (qui vaut -1) et on a

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour A_2. On voit que la somme des deux premières lignes de la matrice donne la troisième. La matrice n'a pas rang maximal et elle n'est pas inversible. Par ailleurs, les deux premières lignes ne sont pas colinéaires et la matrice a donc rang 2. L'espace engendré par ses vecteurs colonne est l'ensemble des vecteurs v tels que le système $A_2X = v$ admet au moins une solution. En échelonnant la matrice augmentée ($[L_1, L_2 + L_1, L_3]$, $[L_1, L_2, L_3 - L_2 = 0]$) on voit que les coordonnés x, y, z de v doivent satisfaire $x + y - z = 0$, qui est donc une équation cartésienne de l'espace.

Pour A_3. Les opérations élémentaires suivantes sur les lignes permettent d'échelonner la matrice : $[L_1, L_2, L_3 - L_1, L_4]$, $[L_1, L_2, L_3 - L_2, L_4]$, $[L_1, L_2, L_4, L_3]$. La matrice échelonnée a quatre pivots, donc A_3 est inversible. Pour échelonner totalement il suffit de faire : $[-L_1, -L_2, L_3, -L_4]$, $[L_1 - L_4, L_2 + L_4, L_3 + 2L_4, L_4]$, $[L_1 + L_3, L_2, L_3, L_4]$, $[L_1 + L_2, L_2, L_3, L_4]$. Les mêmes opérations sur la matrice identité donnent l'inverse :

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner la définition de la transposée A^t de A. Donner la définition de "A est symétrique". **0,5 + 0,5 pt**

   La transposée A^t de A est la matrice de taille $n \times n$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$, l'ième colonne de A^t coïncide avec l'ième ligne de A. Une matrice carrée est symétrique si $A = A^t$.

2. Donner, en fonction de A^t et B^t, les expressions $(AB)^t$ et $(A^k)^t$ pour tout entier $k \geq 1$. **0,5 + 0,5 pt**

   On a $(AB)^t = B^t A^t$ et $(A^k)^t = (A^t)^k$.

3. On suppose que est A symétrique, montrer que pour tous entiers $m, k \geq 1$ la matrice $(B^t)^m A^k B^m$ est également symétrique. **1 pt**

   En utilisant les points précédents ainsi que le fait que $(B^t)^t = B$ on a $[(B^t)^m A^k B^m]^t = (B^m)^t (A^k)^t (((B^t)^m)^t = (B^t)^m (A^t)^k (((B^t)^t)^m = (B^t)^m A^k B^m$ ce qui montre que la matrice est symétrique.

4. On suppose que A est symétrique et inversible, montrer que A^{-1} est aussi symétrique. **1 pt**

   Pour cela il suffit de montrer que la transposée de l'inverse est l'inverse de la matrice en utilisant le fait que la matrice identité est symétrique. Par hypotèse on a $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. En prenant les transposées à chaque membre on obtient $(AA^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t$ et donc $(A^{-1})^t A^t = A^t (A^{-1})^t = I_n$ puis en utilisant le fait que A est symétrique $(A^{-1})^t A = A(A^{-1})^t = I_n$ ce qui permet de conclure $(A^{-1})^t = A^{-1}$.

5. On rappelle qu'une matrice carrée A est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = \mathbf{0}$. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible. **1 pt**

Si A est la matrice nulle (cas $k = 1$), alors pour toute matrice carrée B de même taille on a $AB = BA = 0 \neq I_n$ et donc A ne peut pas admettre d'inverse. On peut alors supposer que $A = A^1 \neq 0$ et qu'il existe $k > 1$ tel que $A^k = 0$. Supposons par l'absurde que A est inversible, à savoir il existe une matrice carrée B de même taille que A et telle que $AB = BA = I_n$. En multipliant par B^{k-1} chaque membre de l'égalité $A^k = 0$ on obtient par récurrence immédiate $A = B^{k-1}A^k = B^{k-1}0 = 0$ ce qui contredit l'hypothèse. Dans tous les cas, une matrice nilpotente ne peut donc pas être inversible.