Aix–Marseille Université 2016-2017

Algèbre Linéaire 1

PLANCHE D'EXERCICES N°4

1 Applications linéaires

Exercice 1 *

1. Déterminer parmi les applications suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, celles qui sont linéaires :

   1. $p_1(x,y) = x,\ \ p_2(x,y) = y,$
   2. $f_1(x,y) = xy,\ f_2(x,y) = x+y,\ \ f_3(x,y) = x+y+1,\ f_4(x,y) = x^2 - y^2,$
   3. $f_5(x,y) = |x+y|,\ f_6(x,y) = \sin x,\ f_7(x,y) = x - 3y.$

2. Déterminer parmi les applications suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, celles qui sont linéaires :

$$g_1(x,y) = (y,x),\ \ g_2(x,y) = (x,y^2),\ \ g_3(x,y) = (1,x).$$

Exercice 2 * Déterminer le noyau et l'image (base et dimension) de chacune des applications linéaires f suivantes :

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (3x+y, x-y)$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+2y, 2x+4y)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (z,y,0)$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+y, x+2y)$.

Exercice 3 * Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que, si $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ désignent les vecteurs de la base canonique, on ait :

$$f(\boldsymbol{e}_1) = (1,1), \qquad f(\boldsymbol{e}_2) = (0,1), \qquad f(\boldsymbol{e}_3) = (-1,1).$$

Trouver une base de Ker(f). Déterminer un supplémentaire de Ker(f) dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à I$m(f)$ (c.à.d qu'il existe un isomorphisme, i.e. une application linéaire bijective du supplémentaire de Ker(f) dans I$m(f)$).

Quelle est l'image réciproque du vecteur $(1,0)$?

Quelle est l'image réciproque du sous espace vectoriel engendré par $(1,0)$?

Exercice 4 On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^6$ donnée par :

$$\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= (-1,-1,-1,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) &= (1,0,0,-1,-1,0) \\ f(0,0,1,0) &= (0,1,0,1,0,-1) \\ f(0,0,0,1) &= (0,0,1,0,1,1) \end{aligned}$$

Déterminer l'image d'un vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbb{R}^4$, c'est à dire exprimer le vecteur $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^6$ en fonction de x_1, x_2, x_3 et x_4. Déterminer le rang de f.

Exercice 5 On considère les espaces vectoriels réels : $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$.

a) Soit $\Psi : E \to F$ définie par $\forall P \in E$, $\Psi(P) = P'$ (polynôme dérivé). Montrer que Ψ est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

b) Soit $\Phi : F \to E$ définie par $\forall P \in F,\ \Phi(P)(x) = \displaystyle\int_0^x P(t)dt$. Montrer que Φ est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

c) Calculer $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.

Exercice 6 Soit
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
et $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ définie par
$$f(A) = AM - MA.$$
Montrer que f est linéaire. Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$.

Exercice 7 Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Montrer que f est injective si et seulement si l'image de toute famille libre de vecteurs de E forme une famille libre de vecteurs de F.

2. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

3. Supposons que f soit bijective. Que peut-on dire des dimensions de E et F ?

Exercice 8 * Donner une application linéaire dont le noyau est le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9 * Donner une application linéaire dont le noyau est la droite engendrée par le vecteur $(-1, 1, 2)$.

Exercice 10 * Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires telles que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{I}m(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 11 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que
$$f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{I}m(f).$$

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E. Supposons que pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.

i) Montrer que si $x \in E$, $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

ii) Quand (x, y) est libre, comparer λ_x, λ_y et λ_{x+y}.

iii) Montrer que f est une homothétie.

Exercice 13 Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire non nulle. On note $H = \text{Ker}(f)$.

i) Montrer que $\text{I}m(f) = \mathbb{R}$.

ii) Soit $x_0 \in E \backslash H$ et posons $F = \text{V}ect(x_0)$. Montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 14 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

i) Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{I}m(g)$ (Indication : écrire $x = x - y + y$ avec $y = g \circ f(x)$).

ii) Montrer que $f(\text{I}m(g)) = \text{I}m(f)$.

2 Noyau et image d'une matrice

Exercice 15 * Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les équations qui définissent le noyau de chacune de ces matrices. Résoudre le système obtenu par l'échelonnement.

2. Donner une base du noyau et déterminer sa dimension.

3. Grâce au théorème du rang, déduire la dimension de l'image de la matrice en question. Trouver une base de l'image.

Exercice 16 *

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver les conditions sur b_1, b_2 et b_3 pour que l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ait une solution.

2. Décrire gémétriquement $\text{I}mA$ (plan ? droite ? tout l'espace ?)

3. Décrire $\text{Ker}A$. Trouver une base du noyau.

Exercice 17 * Trouver une base du noyau et une base de l'image de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 Considérons la matrice $n \times n$, M_n, dont les coefficients sont les n^2 premiers entiers positifs écrits dans l'ordre croissant l'un à la suite de l'autre, colonne par colonne. Par exemple

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

i) Calculer le rang de M_4.

ii) Calculer le rang de M_n pour tout entier $n \geq 2$.

iii) Pour quels entiers n la matrice M_n est-elle inversible ?

Exercice 19

1. Donner une matrice dont l'image est engendrée par le vecteur $(1, 5)$.

2. Donner une matrice dont le noyau est engendré par le vecteur $(1, 2, 3)$.

3. Donner une matrice dont le noyau contient le vecteur $(1, 2, 0)$ et l'image les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 0, 1)$.

Exercice 20 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Décrivez géométriquement l'image et le noyau des matrices A, A^2 et A^3 .

Exercice 21 Soit A une matrice carrée.

1. Quelle relation y a-t-il entre Ker(A) et Ker(A^2) ? Sont-ils nécessairement égaux ? Mêmes questions pour I$m(A)$ et I$m(A^2)$.

2. Plus généralement que peut-on dire de Ker(A), Ker(A^2), Ker(A^3), Ker(A^4), etc.

3. Même question pour I$m(A)$, I$m(A^2)$, I$m(A^3)$, I$m(A^4)$, etc.

4. Supposons que Ker$(A^2) =$ Ker(A^3). Est-ce que Ker$(A^3) =$ Ker(A^4) ?

Exercice 22 Considérons une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in M_{p,m}(\mathbb{R})$, telles que Ker$(A) = \{0\}$ et Ker$(B) = \{0\}$. Quand est-ce que Ker$(A) =$ Ker(B) (il n'y a aucune erreur dans la question) ? Dans tous les cas trouver Ker(AB).

Exercice 23 Soient $A \in M_{5,4}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{4,5}(\mathbb{R})$. En raisonnant géométriquement (utiliser le théorème du rang), montrer pourquoi AB n'est jamais inversible.

Exercice 24 Répondre aux questions suivantes en raisonnant sur l'application linéaire associée à une matrice.

1.Montrer qu'une matrice qui a deux colonnes égales n'est pas inversible.

2. Les colonnes d'une matrice inversible sont-elles toujours linéairement indépendantes ?

3. Considérons une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, telles que $AB = I_n$. On suppose que $n \neq p$. Les vecteurs colonnes de B sont-ils linéairement indépendants ? Et ceux de A ?

4. Considérons une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. Supposons que les vecteurs colonnes de A soient linéairement indépendants, ainsi que les vecteurs colonnes de B. Les vecteurs colonnes de AB sont-ils linéairement indépendants ?

3 Changement de base

Exercice 25 * On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

1. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ canonique.

2. (a) Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ avec $\boldsymbol{e}'_1 = (0, 1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1, 0)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
   (c) Ecrire la matrice A' de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Vérifier que $A' = P^{-1}AP$.
3. Mêmes questions avec la famille de vecteurs $\mathcal{B}'' = (\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2)$ avec $\boldsymbol{e}''_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{e}''_2 = (1, -1)$

Exercice 26

1. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1).$$

1. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ canonique.
2. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ avec $\boldsymbol{e}'_1 = (2, 1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1, -1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{I}d_{\mathbb{R}^2})$ de l'application identité de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}')$ dans$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$.
4. En déduire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
5. Ecrire la matrice A' de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$ et vérifier que $A' = P^{-1}AP$.

Exercice 27 * Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\boldsymbol{u} = (1, -1, 0), \qquad \boldsymbol{v} = (1, 1, 1), \qquad \boldsymbol{w} = (0, 1, 1).$$

1. Montrer que les trois vecteurs $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à cette base notée $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
2. On considère l'application linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + 3y - 3z, x - y + z, x + y - z).$$

Déterminer la matrice de cette application dans la base canonique.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer Ker(f). Quel est sa dimension ?
5. En déduire le rang de f et donner une base de I$m(f)$.

Exercice 28 On considére l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(e_1) = (1, -1, 1), \;\; f(e_2) = (1, 1, -1) \;\; et \;\; f(e_3) = (1, 0, 0),$$

où $e_1, \;\; e_2 \;\; et \;\; e_3$ sont les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $f(x, y, z)$ en fonction de (x, y, z).

2. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f en base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3.Déterminer le noyau et l'image de f. Donner une base du noyau et de l'image et en déduire leur dimensions respectives.

4.L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

On considère maintenant les trois vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, -1, 1), \qquad u_2 = (1, 1, -1), \qquad u_3 = (-1, 1, 1).$$

5. Montrer que les trois vecteurs (u_1, u_2, u_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à cette nouvelle base notée $\mathcal{B}'$.

7. Calculer P^{-1} par échelonnement total.

8. En déduire la matrice A' qui représente l'application linéaire f dans cette nouvelle base.

Exercice 29 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\boldsymbol{a} = (1, 0, 1), \qquad \boldsymbol{b} = (1, -1, 1), \qquad \boldsymbol{c} = (1, 2, -1).$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que :

$$f(\boldsymbol{a}) = (2, 3, -1), \;\; f(\boldsymbol{b}) = (3, 0, -2), \;\; f(\boldsymbol{c}) = (2, 7, -1).$$

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $f(x, y, z)$ en fonction de (x, y, z).

2. Même question pour l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$g(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}, \qquad g(\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{c}, \qquad g(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.$$

3. Déterminer le noyau et l'image de ces deux applications linéaires ainsi que des bases de ces sous espaces.

Exercice 30 *

Dans $\mathbb{R}^3$ vérifier que les vecteurs suivants forment une base :

$$a = (4, 2, 0), \qquad b = (1, 2, -3), \qquad c = (0, 2, 5)$$

Trouver les images de la base canonique par l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(a) = 2, \qquad f(b) = -7, \qquad f(c) = -1,$$

Exercice 31

Dans l'espace $M_2(\mathbb{R})$, on considère le vecteur

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit l'endomorphisme $G : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ donné par la multiplication à gauche par P :

$$\forall A \in M_2(\mathbb{R}), \quad G(A) = PA.$$

1. Vérifier que G est effectivement une application linéaire.

On rappelle la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B} = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Trouver les images des matrices M_i par l'application G. En déduire alors la matrice de l'application G dans la base $\mathcal{B}$ (qui est donc une matrice 4×4).

3. Faire la même chose pour l'endomorphisme $D : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ qui est la multiplication à droite par P, c'est-à-dire $D(A) = AP$ pour tout $A \in M_2(\mathbb{R})$.