Géométrie et Arithmétique

Contrôle continu 3
4/10/2016

Exercice (Toutes les réponses doivent être justifiées)

1) Soit $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ la droite donnée par l'équation cartésienne $3x + 4y + 5 = 0$. Trouver une équation paramétrique de la droite $\mathcal{L}'$ orthogonale à $\mathcal{L}$ et passant par $P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le point d'intersection des deux droites.

Corrigé. *D'après l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{L}$, on obtient que le vecteur*

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

est un vecteur orthogonal à $\mathcal{L}$. Ainsi, u est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{L}'$ et un système d'équations paramétriques de $\mathcal{L}'$ est donné par :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Pour déterminer le point d'intersection des droites $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, il suffit de remplacer les équations paramétriques de $\mathcal{L}'$ dans l'équation cartésienne de $\mathcal{L}$. On obtient :

$$3(1 + 3t) + 4(1 + 4t) + 5 = 0$$

d'où $t = -\frac{12}{25}$.

En remplaçant cette valeur de t dans (1) on obtient les coordonnées du point d'intersection, qui sont donc :

$$\begin{cases} x = -11/25 \\ y = -23/25 \end{cases} \tag{2}$$

2) Soient $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$ trois points du plan $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

(b) Déterminer l'aire du triangle ABC.

Corrigé.

(a) *Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{AC}$. On a :*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ($\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$), on en déduit que A, B, C ne sont pas alignés.

(b) L'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et elle est donc donnée par la formule :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|-2\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}.$$