Géométrie et Arithmétique

Contrôle continu 4 - Corrigé
25/10/2016

Exercices (Toutes les réponses doivent être justifiées)

1) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

(a) $1 - i + (6 + 5i)(1 - 2i)$;

Corrigé. $1 - i + (6 + 5i)(1 - 2i) = 1 - i + 6 - 12i + 5i + 10 = 17 - 8i$.

(b) $\dfrac{2+3i}{2-3i}$;

Corrigé. $\dfrac{2+3i}{2-3i} \cdot \dfrac{2+3i}{2+3i} = \dfrac{(2+3i)^2}{4+9} = \dfrac{4+12i-9}{13} = -\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}i$.

(c) $\dfrac{-i}{1+2i} + \dfrac{i}{1-2i}$;

Corrigé. $\dfrac{-i}{1+2i} + \dfrac{i}{1-2i} = \dfrac{-i(1-2i) + i(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{-i-2+i-2}{5} = -\dfrac{4}{5}$.

(d) $\overline{\left(\dfrac{3+i}{1+3i}\right)^2}$;

Corrigé. $\overline{\left(\dfrac{3+i}{1+3i}\right)^2} = \overline{\left(\dfrac{3+i}{1+3i} \cdot \dfrac{1-3i}{1-3i}\right)^2} = \overline{\left(\dfrac{3-9i+i+3}{10}\right)^2} = \overline{\left(\dfrac{6-8i}{10}\right)^2} =$
$= \overline{\dfrac{36-96i-64}{100}} = \overline{\dfrac{-28-96i}{100}} = -\dfrac{28}{100} + i\dfrac{96}{100} = -\dfrac{7}{25} + \dfrac{24}{25}i$.

(e) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$.

Corrigé. $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = 1 + i - 1 - i + 1 = 1$.

2) Soient $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. Montrer que $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1 - z_2 \in i\mathbb{R}$ si et seulement si z_1 et z_2 sont conjugués.

Corrigé. *Soient* $z_1 = a + ib$ *et* $z_2 = c + id$, *avec* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$) *Supposons que* $z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d) \in \mathbb{R}$ *et* $z_1 - z_2 = (a-c) + i(b-d) \in i\mathbb{R}$. *Alors* $b + d = 0$ *et* $a - c = 0$, *d'où* $d = -b$ *et* $c = a$. *On obtient* $z_2 = a - ib = \overline{z_1}$.

$\Leftarrow$) *Supposons que* $z_2 = \overline{z_1} = a - ib$. *Il s'ensuit que* $z_1 + z_2 = 2a \in \mathbb{R}$ *et* $z_1 - z_2 = 2ib \in i\mathbb{R}$.