Géométrie et Arithmétique

Contrôle continu 5 - Corrigé
9/11/2016

Questions du cours

1) Énoncer la formule d'Euler.

Corrigé. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *on a*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{1}$$

2) En déduire les formules d'Euler pour $\cos\theta$ et $\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Corrigé. *D'après* (1) *on a aussi :*

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

On en déduit les formules d'Euler pour $\cos\theta$ et $\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exercices (Toutes les réponses doivent être justifiées)

3) Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.

Corrigé. *On a* $|z_1| = 2$ et $|z_2| = 2$. Donc :

- $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- $z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

4) Représenter sous forme algébrique et exponentielle le nombre complexe $\frac{z_2}{z_1}$.

Corrigé. *En utilisant les formes algébriques de* z_1 *et* z_2 *on obtient :*

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i + \sqrt{6}i + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

D'autre part, d'après 3), on a :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

5) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Corrigé. *D'après 4) on a :*

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \qquad \frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

On en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$