Année universitaire 2015-2016

Site : ☐Luminy ☐St-Charles ☐St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☐Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis
Sujet session : ☒1er semestre - ☐2ème semestre - ☐Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : ☒L1 / ☐L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☐M2 - ☐LP - ☐DU Nom diplôme : Licence IM
Code Apogée du module : SMI1U3T ? Libellé du module : Géométrie et arithmétique 1
Documents autorisés : ☐OUI - ☒NON Calculatrices autorisées : ☐OUI - ☒NON

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations

$$\mathcal{D}_1 \ : \ \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_2 \ : \ \begin{cases} x = -t \\ y = t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.
2. Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires.
3. Donner une équation cartésienne du plan π orthogonal à la droite $\mathcal{D}_1$ et contenant la droite $\mathcal{D}_2$.
4. Trouver le point A d'intersection de la droite $\mathcal{D}_1$ avec le plan π.

Exercice 2. Soit $A(X) = X^6 - X^4 + X^2 - 1$.

1. Montrer que 1 et -1 sont deux racines de $A(X)$.
2. Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $X^2 - 1$.
3. Donner la forme exponentielle et algébrique des racines 4-ièmes complexes de -1.
4. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $A(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Soit $Q(X) = X(X-1)(X^2+1)$. Déterminer $\mathrm{pgcd}(A, Q)$ et $\mathrm{ppcm}(A, Q)$.

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Représenter les solutions sous forme exponentielle.
2. Montrer que si $a \in \mathbb{K}$ est une racine d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, alors ce polynôme est divisible par $X - a$.
3. Rappeler la définition d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
4. Montrer que le polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Est-il irréductible dans $\mathbb{C}[X]$?
5. Déduire des questions précédentes que pour tout $m, n, p \in \mathbb{N}$, le polynôme $P(X)$ divise le polynôme $X^{3n} + X^{3m+1} + X^{3p+2}$ dans $\mathbb{C}[X]$.