Faculté des Sciences Aix*Marseille Université

Année universitaire 2016-2017

Site: ⊠Luminy ⊠St-Charles □St-Jérôme □Cht-Gombert ⊠Aix-Montperrin □Aubagne-Satis
Sujet session: ⊠1er semestre - □2ème semestre - □Session 2 Durée de l'épreuve: 2h
Examen de: ⊠L1 / □L2 / □L3 - □M1 / □M2 - □LP - □DU Nom diplôme: Licence IM
Code Apogée du module: SMI1U3T Libellé du module: Géométrie et arithmétique 1
Documents autorisés: □OUI - ⊠NON Calculatrices autorisées: □OUI - ⊠NON

Questions de cours. Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que le degré de PQ est la somme des degrés de P et Q. On se limitera au cas $P, Q \neq 0$.
2. Donner la définition de polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$. Dire quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
3. Rappeler la définition de racine n-ième d'un nombre complexe w.

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^3 + (-1+6i)X^2 - (13+4i)X - 11 - 10i$.

1. Effectuer la division de P par $(X+1)$.
2. Trouver les racines carrées de $3+4i$. En déduire les racines carrées de $12+16i$.
3. Trouver les racines de P.

Exercice 2.

1. Déterminer l'écriture algébrique des racines sixièmes de l'unité.
2. Décomposer $X^6 - 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. On considère la rotation $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = iz + 2$.

1. Déterminer son centre et son angle de rotation.
2. Soit E l'ensemble défini par la condition $\mathrm{Im}((z-(1+i))^2) = 0$. Décrire E et le représenter graphiquement dans le plan complexe.
3. Déterminer l'image $f(E)$ de l'ensemble E par la rotation f.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $x - y = 0$ et $x + y + z - 1 = 0$ respectivement.

1. Leur intersection est une droite $\mathcal{D}_1$ dont on donnera une équation paramétrique et un vecteur directeur.
2. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$ orthogonal à $\mathcal{D}_1$ et passant par $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_1$.
3. Déterminer un point B de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3$ et un point C de $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ tels que $A \neq B, C$.
4. Calculer le cosinus de l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (sa valeur absolue est le cosinus de l'angle θ entre les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, avec $0 < \theta \leq \pi/2$).