Année universitaire 2015-2016

Site : ☒Luminy ☒St-Charles ☐St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☒Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis
Sujet session : ☒1er semestre - ☐2ème semestre - ☐Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : ☒L1 / ☐L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☐M2 - ☐LP - ☐DU Nom diplôme : Licence IM
Code Apogée du module : SMI1U3T Libellé du module : Géométrie et arithmétique 1
Documents autorisés : ☐OUI - ☒NON Calculatrices autorisées : ☐OUI - ☒NON

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations

$$\mathcal{D}_1 \ : \left\{ \begin{array}{l} x-y+3=0 \\ z=1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_2 \ : \left\{ \begin{array}{l} x=-t \\ y=t+1 \\ z=t+1 \end{array} \right. , \ t\in\mathbb{R}.$$

1. Déterminer une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.
   En prenant $x=t$ comme paramètre on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} x=t \\ y=t+3 \\ z=1 \end{array} \right. , \ t\in\mathbb{R}.$$

2. Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales.
   Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs pour $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement. Leur produit scalaire vaut $1\times(-1)+1\times1+0\times1=0$: les deux droites sont donc orthogonales par définition.
3. Donner une équation cartésienne du plan π orthogonal à la droite $\mathcal{D}_1$ et contenant la droite $\mathcal{D}_2$.
   D'après le point précédent, v_1 est un vecteur orthogonal au plan π. L'équation cartesienne du plan est donc de la forme : $x+y+d=0$. Le plan π contient $\mathcal{D}_2$ si léquation $(-t)+(t+1)+d=0$ est satisfaite pour tout $t\in\mathbb{R}$. Cela est le cas si et seulement si $d=-1$. L'équation cartesienne du plan π est donc $x+y-1=0$. Puisque $\mathcal{D}_2$ est orthogonale à $\mathcal{D}_1$, pour déterminer d il suffit d'imposer que π contienne un point de $\mathcal{D}_2$, par exemple $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Trouver le point A d'intersection de la droite $\mathcal{D}_1$ avec le plan π.
   Les coordonnées de A doivent satisfaire les équations du plan et de la droite $\mathcal{D}_1$. Pour les déterminer il suffit alors de résoudre soit le système

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y+3=0 \\ z=1 \\ x+y-1=0 \end{array} \right.$$

soit l'éqation $t+t+3-1=0$ dans la variable t. On obtient $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soit $A(X) = X^6 - X^4 + X^2 - 1$.

1. Montrer que 1 et -1 sont deux racines de $A(X)$.
   On a $A(1) = 1^6 - 1^4 + 1^2 - 1 = 0$ *et* $A(-1) = (-1)^6 - (-1)^4 + (-1)^2 - 1 = 0$ *et* 1 *et* -1 *sont racines de* A.
2. Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $X^2 - 1$.
   On a $A(X) = (X^4 + 1)(X^2 - 1)$.
3. Donner la forme exponentielle et algébrique des racines 4-ièmes complexes de -1.
   Les racines 4*-ièmes de* -1 *sont :* $e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $e^{\frac{i3\pi}{4}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $e^{\frac{i5\pi}{4}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $e^{\frac{i7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $A(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
   La décomposition de $A(X)$ *sur* $\mathbb{C}$ *est* $(X-1)(X+1)(X-e^{\frac{i\pi}{4}})(X-e^{\frac{i3\pi}{4}})(X-e^{\frac{i5\pi}{4}})(X-e^{\frac{i7\pi}{4}})$ *et sur* $\mathbb{R}$ $(X-1)(X+1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$. *Cette dernière est obtenue en multipliant ensemble les facteurs correspondant aux racines complexes conjuguées.*
5. Soit $Q(X) = X(X-1)(X^2+1)$. Déterminer $\mathrm{pgcd}(A, Q)$ et $\mathrm{ppcm}(A, Q)$.
   En tenant compte de la décomposition en facteurs irréductibles des deux polynômes on a : $\mathrm{pgcd}(A, Q) = X - 1$ *et* $\mathrm{ppcm}(A, Q) = X(X^2 + 1)A(X) = X^9 - X$.

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Représenter les solutions sous forme exponentielle.
   Les solutions de léquation sont : $\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ *et* $\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.
2. Montrer que si $a \in \mathbb{K}$ est une racine d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, alors ce polynôme est divisible par $X - a$.
   Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$. *Puisque* $X - a$ *n'est pas le polynôme nul, on peut faire la divison de* $P(X)$ *par* $X - a$. *On a* $P(X) = Q(X)(X - a) + R$, *où* R *est un polynôme de degré strictement plus petit du degré de* $X - a$. *Il en suit que* $R = r \in \mathbb{K}$ *est un polynôme constant. En évaluant les deux termes de l'égalité* $P(X) = Q(X)(X - a) + r$ *en* a *on obtient* $P(a) = Q(a)(a - a) + r = r$. *Il en suit que* a *est racine de* P *si et seulement si, par définition,* $P(a) = 0$ *si et seulement si* $r = 0$, *à savoir si et seulement si le reste de la division de* P *par* $X - a$ *est nul et* P *est divisible par* $X - a$.
3. Rappeler la définition d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
   Un polynôme P *de* $\mathbb{K}[X]$ *de degré positif (à savoir, non constant) est irréductible sur* $\mathbb{K}$ *si pour tous* $A, B \in \mathbb{K}[X]$ *tels que* $P = AB$ *on a que soit le degré de* A *soit celui de* B *est égal à* 0.
4. Montrer que le polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Est-il irréductible dans $\mathbb{C}[X]$?
   Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ *de degré* 2 *est irréductible si et seulement si son discriminant est négatif. Puisque cela arrive si et seulement si les deux racines complexes du polynôme ne sont pas réelles,* $P(X)$ *est irréductible sur* $\mathbb{R}$ *d'après la première question. En revanche,* P *n'est pas irréductible sur* $\mathbb{C}$ *car les seuls polynômes irreductibles de* $\mathbb{C}[X]$ *sont ceux de degré* 1.
5. Déduire des questions précédentes que pour tout $m, n, p \in \mathbb{N}$, le polynôme $P(X)$ divise le polynôme $X^{3n} + X^{3m+1} + X^{3p+2}$ dans $\mathbb{C}[X]$.
   On vérifie qu'on a $(e^{\frac{2i\pi}{3}})^{3n} + (e^{\frac{2i\pi}{3}})^{3m+1} + (e^{\frac{2i\pi}{3}})^{3p+2} = 1 + (e^{\frac{2i\pi}{3}})^1 + (e^{\frac{2i\pi}{3}})^2 = P(e^{\frac{2i\pi}{3}}) = 0$. *Il en suit que* $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ *est racine du polynôme donné et donc* $(X - e^{\frac{2i\pi}{3}})$ *le divise, d'après*

la question 2. De la même façon on montre que $e^{\frac{4i\pi}{3}}$ *est racine du polynôme (on peut aussi remarquer que le polynôme* $X^{3n} + X^{3m+1} + X^{3p+2}$ *est réel et donc s'il admet un nombre complexe comme racine, il doit admettre aussi son conjugué comme racine). On en déduit que* $(X - e^{\frac{4i\pi}{3}})$ *divise* $X^{3n} + X^{3m+1} + X^{3p+2} = (X - e^{\frac{2i\pi}{3}})Q(X)$. *Or les polynomes* $(X - e^{\frac{2i\pi}{3}})$ *et* $(X - e^{\frac{4i\pi}{3}})$ *sont premiers entre-eux (car* $e^{\frac{4i\pi}{3}} \neq e^{\frac{4i\pi}{3}}$*). Le théorème de Gauss assure alors que* $(X - e^{\frac{4i\pi}{3}})$ *divise* $Q(X)$. *On en déduit que* $X^{3n} + X^{3m+1} + X^{3p+2} = (X - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X - e^{\frac{4i\pi}{3}})Q_1(X) = P(X)Q_1(X)$ *ce qui montre que* P *divise le polynôme donné.*