[Le texte entre crochets ne fait pas partie du corrigé : il s'agit de commentaires.]

Questions de cours

1. La *linéarité à gauche* du produit scalaire s'écrit ainsi pour des vecteurs u, v, w et un scalaire λ :

$$(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w, \qquad (\lambda\, u)\cdot v = \lambda(u\cdot v).$$

2. L'*inégalité triangulaire* et l'*inégalité de Cauchy–Schwarz* s'écrivent ainsi pour des vecteurs u, v :

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \qquad |u\cdot v| \leqslant \|u\|\,\|v\|.$$

3. En élevant au carré chaque membre de le première inégalité, on obtient :

$$\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = \|u\|^2 + 2\,u\cdot v + \|v\|^2, \qquad (\|u\|+\|v\|)^2 = \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2.$$

D'après la seconde inégalité, on a donc $\|u+v\|^2 \leqslant (\|u\|+\|v\|)^2$, d'où la première inégalité.

4. Si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur non nul, alors $v = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul orthogonal à u.

[On peut aussi poser $v = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.]

5. Si $u \wedge v = \vec{0}$, alors les vecteurs u, v sont *colinéaires*.

[La réciproque est vraie.]

Exercice 1

On suppose que les points A, B, C, D forment un parallèlogramme dans $\mathbb{R}^3$, et on fixe les coordonnées :

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. On a $u = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit les coordonnées du point D :

$$D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a $u\cdot v = 1$ et $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$.

Si α est l'angle (non orienté) entre u et v, on a $\cos\alpha = \dfrac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|} = \dfrac{1}{2}$, d'où $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

3. Les vecteurs $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{BC}$ forment une base du plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B, C.

Le plan $\mathcal{P}$ est donc défini par le système paramétrique $\begin{cases} x = s, \\ y = s+t, \\ z = t, \end{cases}$ $(s, t \in \mathbb{R})$.

4. Le vecteur $w = u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

5. L'aire du parallèlogramme $ABCD$ est $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = \|u \wedge v\| = \sqrt{3}$.

Exercice 2

1. Le système paramétrique $\begin{cases} x = 3t+7, \\ y = 2t-1, \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ définit une *droite* de $\mathbb{R}^2$.

   Cette droite contient le point $A(7,-1)$ et a pour vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Le système paramétrique $\begin{cases} x = s+t, \\ y = s-t-1, \\ z = s+2, \end{cases}$ $(s,t \in \mathbb{R})$ définit un *plan* de $\mathbb{R}^3$.

   Ce plan contient le point $A(0,-1,2)$ et a pour base (u,v) où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. L'équation cartésienne $x+2y+1=0$ définit une *droite* de $\mathbb{R}^2$.

   Si on pose $y=t$, on obtient le système paramétrique $\begin{cases} x = -1-2t, \\ y = t, \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

   [On pouvait aussi poser $x=t$.]

   Cette droite contient le point $A(-1,0)$ et a pour vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. L'équation cartésienne $x-y+z+1=0$ définit un *plan* de $\mathbb{R}^3$.

   Si on pose $y=s$ et $z=t$, on obtient le système paramétrique $\begin{cases} x = s-t-1, \\ y = s, \\ z = t \end{cases}$ $(s,t \in \mathbb{R})$.

   [On pouvait aussi poser $x=s$ et $y=t$, ou $x=s$ et $z=t$.]

   Ce plan contient le point $A(-1,0,0)$ et a pour base (u,v) où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} 5x-10y-3 = 0, \\ y-\frac{1}{2}x-7 = 0, \end{cases}$ définit l'*ensemble vide* dans $\mathbb{R}^2$.

   Il n'a pas de solution, car si on ajoute 10 fois la seconde équation à la première, on obtient $-73=0$.

6. Le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x-2y+z+1 = 0, \\ 2y-x = 0, \end{cases}$ définit une *droite* de $\mathbb{R}^3$.

   Si on pose $y=t$, on obtient le système linéaire $\begin{cases} x+z = 2t-1, \\ x = 2t. \end{cases}$

   Si on enlève la seconde équation à la première, on obtient le système paramétrique $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t, \\ z = -1, \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

   [On pouvait aussi poser $x=t$, mais pas $z=t$.]

   Cette droite contient le point $A(0,0,-1)$ et a pour vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.