Aix-Marseille Université 2015-2016

Géométrie et arithmétique 1

Partiel 2 - 13 novembre 2015

Durée : 2 heures. Sans documents ni calculatrices

Le barème du sujet est indiqué ci-contre. Pour obtenir la note maximale, vous devez obtenir 20 points (sur 22 points au total).

Exercice 1. Soient $z = 1 - i$ et $w = \sqrt{3} + i$.

[1 pt] 1. Écrire z et w sous forme polaire.

[1 pt] 2. Donner la forme polaire et la forme algébrique du nombre complexe $u = \dfrac{z^{12}}{w^3}$.

Exercice 2.

[2 pts] 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 = 3 + 4i$.

[2 pts] 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation de second degré $iz^2 - 3iz - 1 + 3i = 0$. On écrira les résultats sous forme algébrique.

Exercice 3. Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

[1 pt] 1. Calculer z^2 sous forme algébrique $a + ib$ avec a et $b \in \mathbb{R}$.

[1 pt] 2. Mettre z^2 sous forme polaire $\rho e^{i\theta}$.

[1 pt] 3. En déduire la forme polaire de z.

[1 pt] 4. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

[1 pt] 5. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $z^n \in \mathbb{R}$?

Exercice 4. On définit la transformation du plan complexe $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & iz \end{array}$.

[1,5 pts] 1. Justifier que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

[1,5 pts] 2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = |f(z)|$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

[1 pt] 1. Énoncer la formule du binôme.

[1 pt] 2. Développer $(1 + e^{i\theta})^3$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

[1 pt] 3. En utilisant la formule du binôme, montrer que $(1 + e^{i\theta})^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ik\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

[2 pts] 4. Énoncer les formules d'Euler et montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

On souhaite trouver toutes les valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ telles que

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k\theta) = 2^n \cos(n\theta) \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right). \qquad \text{(E)}$$

[1 pt] 5. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k\theta) = 2^n \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

[2 pt] 6. Résoudre l'équation (E).