Aix-Marseille Université 2016-2017

Géométrie et arithmétique 1

Partiel 2 - 25 novembre 2016
Durée : 2 heures. Sans documents ni calculatrices

Exercice 1.

1. Donner la forme exponentielle de $u = -2 + 2i$ et celle de $u' = -\sqrt{3} - i$.
2. Calculer les racines carrées de $v = 8 + 6i$ en forme algébrique.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 - i)z^2 + (3 - 3i)z + 2 - 4i = 0$.
4. Calculer les racines cubiques de $w = -8i$ en forme exponentielle.
   On donnera aussi leur forme algébrique et on les dessinera dans le plan complexe.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Calculer le produit $(1 - z)\sum_{k=0}^{n-1} z^k$, et en déduire la formule pour la somme $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ si $z \neq 1$.
2. En déduire la formule suivante pour $u \neq 1, -1$:
$$\sum_{k=0}^{n-1} u^{2k+1} = u\frac{1 - u^{2n}}{1 - u^2}.$$
3. Calculer u^{2n+1} pour $u = e^{i\frac{\pi}{2n+1}}$, et en déduire la formule suivante dans ce cas particulier :
$$\sum_{k=0}^{n-1} u^{2k+1} = \frac{1}{1 - u}.$$
4. Calculer la partie réelle de $\dfrac{1}{1 - u}$ pour un complexe $u \neq 1$ tel que $|u| = 1$.
5. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\dfrac{(2k + 1)\pi}{2n + 1}$.

Exercice 3.

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe z en fonction de z et $\overline{z}$.
2. En déduire la formule suivante pour le produit scalaire, où O est l'origine du plan complexe et P, P' sont les points d'affixes respectifs z, z' :
$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \frac{z\overline{z'} + \overline{z}z'}{2}.$$

Soient A, B, C des points non alignés d'affixes respectifs a, b, c où $|a| = |b| = |c|$, et H le point d'affixe $h = a + b + c$.

3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont orthogonaux.
4. En déduire que H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC.