Année universitaire 2015-2016

Site: ☒Luminy ☒St-Charles ☐St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☒Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis
Sujet session : ☐1er semestre - ☐2ème semestre - ☒Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : ☒L1 / ☐L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☐M2 - ☐LP - ☐DU Nom diplôme: Licence IM
Code Apogée du module : SMI1U3T Libellé du module: Géométrie et arithmétique 1
Documents autorisés : ☐OUI - ☒NON Calculatrices autorisées : ☐OUI - ☒NON

Ce sujet comporte 1 page. Dans l'exercice 1, une *équation* désigne en fait un *système d'équations*.

Exercice 1. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite passant par le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et soit $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation cartésienne $\begin{cases} x - y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$.
2. Donner un vecteur directeur u_2 et une équation paramétrique de $\mathcal{D}_2$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.
4. Calculer un point P de $\mathcal{D}_1$ et un point Q de $\mathcal{D}_2$ tels que l'unique droite $\mathcal{D}$ passant par ces deux points soit orthogonale à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = iz + 2$.

1. Résoudre l'équation $f(z) = z$.
2. Montrer que f est une similitude, dont on donnera le centre, l'angle, et le rapport.
3. On fixe un réel $r > 0$ et on pose $\mathcal{C} = \{1 + i + re^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
   Quelle est l'interprétation géométrique de cet ensemble ?
4. Quelle est l'image de $\mathcal{C}$ par f ?

Exercice 3. On fixe un entier $n > 0$ et un complexe $c \neq 0$.

1. Rappeler la définition des racines n-ièmes de c. Combien y en a-t-il ?
2. Calculer les racines cubiques de $c = 8i$ en forme exponentielle, puis en forme algébrique.

Exercice 4. On considère les polynômes $P(X) = X^6 + X^5 - 4X^4 + 2X^3 - 11X^2 + X - 6$ et $A(X) = 6X^3 + 5X^2 - 22X + 1$.

1. Calculer le polynôme dérivé P' de P.
2. Calculer le quotient Q et le reste de la division euclidienne de P' par A.
3. Quelles sont les racines complexes de Q ?
4. Montrer que ce sont aussi des racines de P, et donc en fait des racines multiples de P.
5. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par Q^2.
6. En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.