GÉOMÉTRIE ET POLYNÔMES
Planche 1 : Géométrie

1 Vecteurs du plan et de l'espace

Exercice 1. On considère les vecteurs :

$$u' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ v' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. Calculer, lorsque cela a un sens, les combinaisons linéaires suivantes :

$$u' + 3v',\ 2u' - v',\ u' + v' - u,\ 2u + v - w,\ 4w,\ u' + 7w.$$

2. Déterminer si, parmi les vecteurs u, v et w il y en a deux qui sont colinéaires.

3. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de u et v ? Et le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

4. Les vecteurs u' et v' forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$? Même question pour les vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^3$.

5. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par rapport à la base $\{u', v'\}$.

Exercice 2. On considère les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les deux vecteurs sont colinéaires.

2. Même question pour les vecteurs $\begin{pmatrix} m \\ m^2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. On considère les deux vecteurs du plan $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de u et v.

2. Écrire sous forme de système l'équation vectorielle

$$xu + yv = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

où x et y sont les inconnues et a et b des paramètres réels. En vue du point précédent, que peut on dire du nombre de solutions du système ?

3. Résoudre le système en fonction des paramètres a et b.

4. Reprendre les points précédents pour les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soient $A\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ trois points de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. Le quadrilatère $OACB$ est-il un parallélogramme ?

Exercice 5.
1. Soit $ABCD$ un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$ Exprimer ses diagonales $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de ses côtés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que les diagonales d'un parallélogramme s'intersectent au milieu de leurs longueurs.

2 Produit scalaire, orthogonalité et norme.

Exercice 6. Calculer les normes $\|u\|$, $\|v\|$, le produit scalaire $u \cdot v$, le cosinus de l'angle entre les vecteurs u et v, ainsi que le projecté orthogonal de u le long de v et de v le long de u.
1. $u = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, **2.** $u = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}\sqrt{8}\\-\sqrt{27}\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 7. Vérifier que les repères suivants sont orthonormés (les vecteurs sont de norme 1 et deux-à-deux orthogonaux).
1. $u = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, **2.** $u = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$.

Exercice 8. Montrer que :
- $< u, v >= \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$;
- $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2)$.

Exercice 9. Montrer que les diagonales d'un losange sont orthogonales.

Exercice 10.
1. Trouver un vecteur w de norme 1, orthogonal aux vecteurs $u = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$.
2. Trouver un vecteur c de norme 1, qui forme l'angle $\pi/3$ avec les vecteurs $a = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 11.
Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
2. En déduire que si, dans un tétraèdre, deux paires d'arêtes opposées sont formées d'arêtes orthogonales, alors il en est de même pour la troisième paire.
3. En déduire aussi qu'un quadrilatère plan dont les côtés opposés sont perpendiculaires a des diagonales perpendiculaires.
4. Dessiner un tel quadrilatère.

Exercice 12. Calculer l'angle formé par les diagonales des deux faces adjacentes dans un cube.

3 Droites dans le plan

Exercice 13. On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que ces trois points sont alignés.

2. Donner une équation paramètrique, puis cartesienne de la droite par ces trois points.

3. On pose $D\begin{pmatrix}-4\\m\end{pmatrix}$. Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que A, B et D soient alignés.

Exercice 14. Dans le plan, soient $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ de vecteur directeur $v = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation cartésienne $x + y = 1$. Déterminer de façon géométrique (avec un dessin) et algébrique l'intersection de ces deux droites.

Exercice 15. On considère les trois points $A\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Trouver l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ du plan qui vérifient $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$.

2. En déduire une équation cartésienne et paramétrique de la droite perpendiculaire à la droite BC et passant par A.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^2$, donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes.

1. Droite passant pas les points $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

2. Droite passant par le point $C\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

3. Droite passant par le point $P\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et orthogonale à la droite d'équation $3x + 4y + 5 = 0$.

Exercice 17. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, trouver les points d'intersection des droites d_1 et d_2 décrites par les équations suivantes :

1. $d_1 : 2x + 5y + 1 = 0$ et $d_2 : x - 2y - 4 = 0$,

2. $d_1 : \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : 3x - 2y - 4 = 0$,

3. $d_1 : \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$.

Exercice 18. Calculer la distance entre le point $A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et la droite $d : x + 6y + 3 = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

4 Produit vectoriel

Exercice 19. Calculer les produits vectoriels des vecteurs u et v suivants.

1. $u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$, **2.** $u = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, **3.** $u = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 20. Soient les trois points de l'espace $A\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$.

1. Déterminer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Calculer l'aire de ce parallélogramme.

Exercice 21. Soient les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $\|u \wedge v\|$, puis $\|u\|$ et $\|v\|$.
2. En déduire l'ensemble des t tels que l'angle entre u et v soit $\pm\pi/3$.
3. Calculer l'aire du parallélogramme de côtés u et v.

Exercice 22. Calculer les aires des figures suivantes.
1. Parallélogramme engendré par les vecteurs $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
2. Triangle de sommets $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. Parallélépipède engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 23.
1. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du tétraèdre de sommets $P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $R \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5 Droites et plans dans l'espace

Exercice 24. Déterminer une équation paramétrique puis cartésienne de la droite de l'espace passant par les points $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vérifier qu'il ne s'agit pas d'une droite vectorielle (c'est-à-dire, elle ne contient pas l'origine) et donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite vectorielle parallèle à la droite par A et B.

Exercice 25. Dans $\mathbb{R}^3$, donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes.
1. Droite passant par les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Droite passant par le point $C \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. Droite étant l'intersection des plans $P_1 : 6x + 2y - z - 9 = 0$ et $P_2 : 3x + 2y + 2z - 12 = 0$.
4. Droite passant par le point $Q \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et orthogonale au plan $P : 3x - y + 2z - 6 = 0$.

Exercice 26.

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne $x+y+2z+1=0$. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{P}$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t+s \\ y = t-s \\ z = -1+2t-s \end{cases}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Exercice 27. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacun des plans de $\mathbb{R}^3$ suivants.

1. Plan passant par le point $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et orthogonal au vecteur $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Plan passant par le point $B \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et parallèle au plan d'équation $x=0$.

3. Plan passant par l'origine et engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Plan passant par les points $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $R \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 28. Dans $\mathbb{R}^3$, trouver les points d'intersection des plans p_1 et p_2 donnés par les équations suivantes.

1. $p_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p_2 : x+y+5z-2=0$.

2. $p_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Exercice 29. Pour les triplets de points de $\mathbb{R}^3$ suivants, déterminer s'ils sont alignés ou pas. En cas affirmatif, donner une équation cartésienne de la droite qui les contient et, en cas négatif, une équation paramétrique du plan qui les contient.

1. $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 30. Pour chacune d'équations suivantes (cartésienne ou paramétrique), préciser si elle définit une droite ou un plan dans $\mathbb{R}^3$. S'il s'agit d'une droite, en donner deux points distincts, s'il s'agit d'un plan, en donner trois points distincts non alignés.

1. $2x+3y+z+5=0$,

2. $\begin{cases} x = -5t+1 \\ y = 2t+3 \\ z = -t+2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$,

3. $\begin{cases} 2x+y+2z-2=0 \\ x=0, \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = -5t+1 \\ y = 2t+3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 31. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Le point $A \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

2. La droite d : $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ est contenue dans le plan $p : 5y - 3z + 13 = 0$.

3. Le point $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient au plan p : $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. La droite d : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, est parallèle au plan $p : x + y - z + 3 = 0$.

5. Les points $P \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Q \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ se situent de même côté du plan $p : 2x + 3z - 7 = 0$.

Exercice 32. Soit $\mathcal{D}$ la droite dans l'espace, définie par l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{t\sqrt{6}}{6} \\ y = \frac{t\sqrt{6}}{6} \\ z = \frac{2t\sqrt{6}}{6} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soit Δ la droite intersection des deux plans d'équations cartésiennes :

$$x + y + z - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x - y - 2 = 0.$$

Calculer le cosinus de l'angle aigu entre ces deux droites.

Exercice 33.

1. Calculer la distance entre le point $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la droite l : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Calculer la distance entre le point $B \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan p : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

3. Calculer la distance entre les plans parallèles d'équations $2x - y + 3z = 0$ et $-4x + 2y - 6z + 8 = 0$.

Exercice 34. Soient P_1 et P_2 les plans de l'espace d'équations cartésiennes :

$$P_1 \ : 2x + y - 1 + 3 = 0 \qquad \text{et} \qquad P_2 \ : -x + z = 0.$$

Soit α l'angle aigu entre ces deux plans. On note n_1 et n_2 les vecteurs normaux de P_1 et P_2 respectivement. On suppose que n_1 et n_2 sont de norme 1, et ont leur première coordonnée positive.

1. Déterminer les coordonnées de n_1 et n_2.

2. Montrer que α est l'angle aigu entre n_1 et n_2.

3. En déduire $\sin(\alpha)$.