# Geometria e Algebra - MIS-Z

## Primo Appello - Soluzioni

22/06/2022

Nome e Cognome:

Corso di Laurea:

Matricola:

**Informazioni**

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti. Il punteggio ottenuto $x$ sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora $x$ sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

| **Esercizio** | **Punteggio** |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**TOTALE**

| |
|---|
| |

**ESERCIZIO 1** [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$U_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z + k = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

- ☐ **VERO**
- ■ **FALSO**

**Giustificazione**

Per $k = 1$ l'insieme $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z + 1 = 0\}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ poiché non contiene il vettore nullo $(0, 0, 0)$.

(b) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora $\det(AB) \neq 0$ se e solo se $A$ e $B$ sono entrambe invertibili.

- ■ **VERO**
- ☐ **FALSO**

**Giustificazione**

Prima di dimostrare l'enunciato ricordiamo che per il teorema di Binet si ha $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ e che una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.

$\Rightarrow$) Supponiamo che $\det(AB) \neq 0$. Allora, poiché $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, si ha che $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$ (infatti se uno dei due fosse nullo allora anche il loro prodotto sarebbe nullo). Ne segue che entrambe $A$ e $B$ sono invertibili.

$\Leftarrow$) Supponiamo che $A$ e $B$ sono invertibili. Allora $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$. Quindi $\det(A)\det(B) \neq 0$ (il prodotto di due numeri reali diversi da zero è diverso da zero).

(c) Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1,2,3) = (1,2), \qquad f(3,2,1) = (3,4), \qquad \text{e} \qquad f(4,4,4) = (5,6).$$

☐ **VERO**

■ **FALSO**

**Giustificazione**

Notiamo che $(4,4,4) = (1,2,3) + (3,2,1)$. Quindi, essendo $f$ lineare, si ha:

$$f(4,4,4) = f((1,2,3) + (3,2,1)) = f(1,2,3) + f(3,2,1) = (1,2) + (3,4) = (4,6),$$

ma questo contraddice il fatto che l'immagine di $(4,4,4)$ è $(5,6)$. Ne segue che una tale applicazione lineare $f$ non può esistere.

(d) Sia $V$ uno spazio euclideo con prodotto scalare $\langle\, , \rangle$. Siano $v, w \in V$ entrambi non nulli. Se $v$ e $w$ sono linearmente dipendenti allora $\langle v, w\rangle \neq 0$.

■ **VERO**

☐ **FALSO**

**Giustificazione**

Se $v$ e $w$ sono non nulli e linearmente dipendenti, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $v = \lambda w$ (si noti che $\lambda$ deve essere non nullo, altrimenti si ha $v = 0_V$). Utilizzando le proprietà del prodotto scalare, abbiamo che

$$\langle v, w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle \neq 0,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\lambda \neq 0$ e $\langle w, w\rangle > 0$ per ogni $w \neq 0_V$ (un prodotto scalare è definito positivo).

**ESERCIZIO 2** [6 punti]. **Sistema con parametro.**

(a) Si enunci il teorema di Rouché–Capelli.

**Teorema**

Un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite $AX = b$, dove $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $b \in M_{m,1}(K)$ e $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, è compatibile se e solo se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$. In tal caso il sistema possiede $\infty^{n-r}$ soluzioni, dove $r = \mathrm{rg}(A)$.

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} 3Y - kZ = 1 \\ X - Y - Z = 0 \\ kX + Y - 4Z = 1 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

| $k$ | **Compatibile?** | **Numero di soluzioni** | **Insieme delle soluzioni** |
|---|---|---|---|
| $k \in \mathbb{R} \setminus \{-6, 2\}$ | SI | 1 | $\left\{\left(\frac{1}{k+6}, \frac{2}{k+6}, -\frac{1}{k+6}\right)\right\}$ |
| $k = -6$ | NO | 0 | - |
| $k = 2$ | SI | $\infty^1$ | $\left\{\left(\frac{1+5t}{3}, \frac{1+2t}{3}, t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$ |

**Svolgimento**

Consideriamo la matrice dei coefficienti $A$ e la matrice orlata $(A|b)$ associate al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -k \\ 1 & -1 & -1 \\ k & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ k & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo innanzitutto i valori di $k$ tali che $\det(A) \neq 0$. Infatti per tali valori avremo $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3$ e quindi, per Rouché–Capelli, il sistema sarà compatibile ed ammetterà un'unica soluzione che determineremo con il metodo di Cramer.

Abbiamo

$$\det(A) = -k^2 - 4k + 12 = -(k+6)(k-2) = 0 \Leftrightarrow k = -6 \text{ o } k = 2.$$

<u>**CASO 1**</u>. Sia dunque $k \in \mathbb{R} \setminus \{-6, 2\}$. Applicando il metodo di Cramer otteniamo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -k \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{2-k}{-(k+6)(k-2)} = \frac{1}{k+6}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -k \\ 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{4-2k}{-(k+6)(k-2)} = \frac{2}{k+6}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{k-2}{-(k+6)(k-2)} = -\frac{1}{k+6}.$$

Quindi per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{-6, 2\}$ l'insieme delle soluzioni è

$$S_k = \left\{ \left( \frac{1}{k+6}, \frac{2}{k+6}, -\frac{1}{k+6} \right) \right\}.$$

<u>**CASO 2**</u>. Se $k = -6$ allora la matrice orlata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -6 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_1 \leftrightarrow R_2$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 + 6R_1$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 + \frac{5}{3}R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

In tal caso abbiamo quindi $\mathrm{rg}(A) = 2$ e $\mathrm{rg}(A|b) = 3$. Dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema è incompatibile.

<u>**CASO 3**</u>. Se $k = 2$ allora la matrice orlata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

CASO 3 Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_1 \leftrightarrow R_2$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In tal caso abbiamo quindi $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(A|b)$. Dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema è compatibile ed ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Scegliendo $Z$ come variabile libera otteniamo l'insieme di soluzioni

$$S_2 = \left\{ \left( \frac{1+5t}{3}, \frac{1+2t}{3}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Si determinino i valori di $k$ per i quali i piani dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$

$$3Y - kZ = 1 \qquad X - Y - Z = 0 \qquad \text{e} \qquad kX + Y - 4Z = 1$$

si intersecano in una retta $r$ e per tali valori si trovino le equazioni parametriche di $r$.

**Svolgimento**

I tre piani si intersecano in una retta $r$ se e solo se il sistema

$$\begin{cases} 3Y - kZ = 1 \\ X - Y - Z = 0 \\ kX + Y - 4Z = 1 \end{cases}$$

possiede $\infty^1$ soluzioni. Per quanto visto nel punto (b) questo accade se e solo se $k = 2$. L'insieme delle soluzioni $S_2$ consiste esattamente dei punti della retta $r$, le cui coordinate sono espresse in funzione di un parametro $t$. Pertanto le equazioni parametriche di $r$ sono:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \\ z = t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**ESERCIZIO 3** [7 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano $\pi_1$ passante per i punti $A(0,1,1)$, $B(2,0,-2)$ e $C(2,1,-1)$ di $\mathbb{E}^3$.

**Svolgimento**

Per scrivere le equazioni parametriche di $\pi_1$ abbiamo bisogno di un punto del piano e di due vettori non collineari della giacitura. Scegliamo:

- Punto: $A(0,1,1)$
- Vettori non collineari della giacitura: $\overrightarrow{AB} = (2,-1,-3)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,0,-2)$

Quindi

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 2s + 2t \\ y = -s + 1 \\ z = -3s - 2t + 1 \end{cases} , \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana di $\pi_1$ ricaviamo $s$ e $t$ dalle prime due equazioni e le sostituiamo nell'ultima:

$$\begin{cases} t = \frac{x-2s}{2} = \frac{x-2+2y}{2} \\ s = 1 - y \\ z = -3s - 2t + 1 \end{cases} \Rightarrow z = -3(1-y) - (x - 2 + 2y) + 1 \Rightarrow x - y + z = 0.$$

Un'equazione cartesiana di $\pi_1$ è quindi:

$$\pi_1 : X - Y + Z = 0.$$

(b) Sia $h \in \mathbb{R}$. Nella famiglia di rette di $\mathbb{E}^3$ definite dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X + (h+1)Y + Z = 2h \\ hX - Z = 2 \end{cases}$$

si determini la retta $r$ passante per il punto $(1,1,0)$.

**Svolgimento**

Determiniamo i valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che $(1,1,0)$ sia una soluzione del sistema

$$\begin{cases} X + (h+1)Y + Z = 2h \\ hX - Z = 2. \end{cases}$$

Otteniamo il sistema di incognita $h$

$$\begin{cases} 1 + h + 1 + 1 = 2h \\ h = 2 \end{cases}$$

che ha unica soluzione $h = 2$. Quindi la retta $r$ cercata è:

$$r : \begin{cases} X + 3Y + Z = 4 \\ 2X - Z = 2. \end{cases}$$

(c) Si mostri che la retta $r$ <u>non</u> è contenuta nel piano $\pi_1$.

**Svolgimento**

Basta far vedere che esiste un punto della retta $r$ che non appartiene a $\pi_1$. Ad esempio il punto $(0, 2, -2) \in r$ non appartiene a $\pi_1$ poiché non verifica l'equazione $X - Y + Z = 0$.

(d) Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che il piano definito dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2ks - 2t + k \\ y = 2s + kt \\ z = 3t + 3 \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

sia parallelo a $\pi_1$.

**Svolgimento**

Due piani sono paralleli se e solo se due vettori a essi normali sono collineari. Dall'equazione cartesiana di $\pi_1$ ricaviamo che un vettore normale è $(1, -1, 1)$. Per determinare un vettore normale al piano

$$\begin{cases} x = 2ks - 2t + k \\ y = 2s + kt \\ z = 3t + 3 \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

calcoliamo il prodotto vettoriale di due vettori che ne generano la giacitura, ad esempio $(2k, 2, 0)$ e $(-2, k, 3)$:

$$(2k, 2, 0) \times (-2, k, 3) = \left( \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ k & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2k & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2k & 2 \\ -2 & k \end{vmatrix} \right) = (6, -6k, 2k^2 + 4).$$

Notiamo che i vettori $(1, -1, 1)$ e $(6, -6k, 2k^2 + 4)$ sono collineari se e solo se $k = 1$, e quindi questo è l'unico valore di $k$ per cui i due piani sono paralleli.

(e) Per i valori di $k$ trovati in (d) si calcoli la distanza del piano corrispondente dal piano $\pi_1$.

**Svolgimento**

Il piano corrispondente a $k = 1$ è

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 2s - 2t + 1 \\ y = 2s + t \\ z = 3t + 3 \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Poiché la distanza tra $\pi_1$ e $\pi_2$ è data dalla distanza di un punto di $\pi_2$ da $\pi_1$, scegliendo $P(1, 0, 3) \in \pi_2$ abbiamo:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_1) = \frac{|1 - 0 + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

**ESERCIZIO 4** [6 punti]. **Prodotto scalare e sottospazio ortogonale.**

(a) Sia $V$ uno spazio vettoriale reale. Si definisca quando una funzione

$$\begin{array}{rccc} \langle\, , \rangle : & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (v,w) & \mapsto & \langle v,w \rangle \end{array}$$

è detta un prodotto scalare su $V$.

**Definizione**

Sia $V$ uno spazio vettoriale reale. Una funzione

$$\begin{array}{rccc} \langle\, , \rangle : & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (v,w) & \mapsto & \langle v,w \rangle \end{array}$$

è detta un prodotto scalare su $V$ se verifica le seguenti tre proprietà:

- $\langle\, , \rangle$ è *bilineare*, ovvero per ogni $u, v, w \in V$, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti identità:
  - $\star$ $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$;
  - $\star$ $\langle u, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle$.
- $\langle\, , \rangle$ è *simmetrica*, ovvero per ogni $v, w \in V$ si ha $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.
- $\langle\, , \rangle$ è *definita positiva*, ovvero per ogni $v \in V$ si ha $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0_V$.

(b) Sia $V$ uno spazio euclideo munito del prodotto scalare $\langle\, , \rangle$. Sia $v \in V$. Si mostri che l'insieme dei vettori ortogonali a $v$, denotato $v^\perp$, è un sottospazio vettoriale di $V$.

**Svolgimento**

Sia $v \in V$. Consideriamo $v^\perp$ l'insieme dei vettori ortogonali a $v$:

$$v^\perp := \{w \in V : \langle v, w \rangle = 0\}.$$

Mostriamo che $v^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $V$:

- $v^\perp \neq \emptyset$, poiché, essendo $\langle v, 0_V \rangle = 0$, si ha $0_V \in v^\perp$.
- Siano $w_1, w_2 \in v^\perp$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora si ha:
  $$\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle = 0 + 0 = 0.$$
  Ne segue che $\lambda w_1 + \mu w_2 \in v^\perp$.

Quindi $v^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $V$.

(c) Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard e sia $v = (2, -1, -2, -2)$. Si determini una base del sottospazio $v^\perp$.

**Svolgimento**

Sia $v = (2, -1, -2, -2)$. Determiniamo una base del sottospazio $v^\perp$:

$$\begin{aligned} v^\perp &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x, y, z, t), (2, -1, -2, -2)\rangle = 0\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y - 2z - 2t = 0\} = \\ &= \left\{ \left( \frac{y + 2z + 2t}{2}, y, z, t \right) : y, z, t \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= Span \left\{ \left( \frac{1}{2}, 1, 0, 0 \right), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \right\}. \end{aligned}$$

Quindi una base di $v^\perp$ è $\left\{ \left( \frac{1}{2}, 1, 0, 0 \right), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \right\}$.

(d) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $W_a := Span\{(1, 2, 3, a)\}$. Si determinino i valori di $a$ tali che

$$\mathbb{R}^4 = v^\perp \oplus W_a,$$

dove $v^\perp$ è il sottospazio trovato al punto (c).

**Svolgimento**

Osserviamo che si ha $\mathbb{R}^4 = v^\perp \oplus W_a$ se e solo se l'unione delle basi di $v^\perp$ e $W_a$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Determiniamo quindi i valori di $a$ tali che

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

. Poiché tale determinante è $a + 3$, abbiamo che $\mathbb{R}^4 = v^\perp \oplus W_a$ se e solo se $a \neq -3$.

**ESERCIZIO 5** [9 punti]. **Una famiglia di endomorfismi di $\mathbb{R}^3$.**

Per $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (2x + 2y, kx + kz, 2y + kz). \end{array}$$

(a) Si determinino i valori di $k$ per cui $f_k$ <u>non</u> è un automorfismo.

**Svolgimento**

Sia $A_k$ la matrice associata a $f_k$ rispetto alla base canonica. Dall'espressione di $f_k$ abbiamo

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ k & 0 & k \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

Allora $f_k$ è un automorfismo se e solo se $\mathrm{rg}(A_k) = 3$, ovvero se e solo se $\det(A_k) \neq 0$. Abbiamo

$$\det(A_k) = -2k^2 - 4k,$$

quindi $f_k$ <u>non</u> è un automorfismo se e solo se $k = 0$ o $k = -2$.

(b) Per uno dei valori di $k$ trovati in (a) si determini una base di $\ker(f_k)$ e di $\mathrm{Im}(f_k)$.

**Svolgimento**

Scegliamo $k = 0$, per cui abbiamo $f_0(x, y, z) = (2x+2y, 0, 2y)$. Determiniamo una base di $\ker(f_0)$ e di $\mathrm{Im}(f_0)$.

- Abbiamo:

$$\begin{aligned} \ker(f_0) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_0(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2x + 2y, 0, 2y) = (0, 0, 0)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = 0\} = \\ &= Span\{(0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

  Quindi $\{(0, 0, 1\}$ è una base di $\ker(f_0)$.

- Abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f_0) &= Span\{f_0(1, 0, 0), f_0(0, 1, 0), f_0(0, 0, 1)\} = \\ &= Span\{(2, 0, 0), (2, 0, 2), (0, 0, 0)\} = \\ &= Span\{(2, 0, 0), (2, 0, 2)\}. \end{aligned}$$

  Quindi $\{(2, 0, 0\}, (2, 0, 2)\}$ è una base di $\mathrm{Im}(f_0)$.

(c) Si richiami la definizione di autovettore e di autovalore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale.

**Definizione**

Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $K$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo di $V$. Un vettore non nullo $v \in V$ è detto *autovettore* di $f$ se esiste $\lambda \in K$ tale che $f(v) = \lambda v$. In tal caso $\lambda$ è detto l'*autovalore* relativo all'autovettore $v$.

(d) Si determinino i valori di $k$ per cui il vettore $(2, 3, 3)$ è un autovettore di $f_k$. Per tali valori di $k$ si determini l'autovalore corrispondente.

**Svolgimento**

Il vettore $v = (2, 3, 3)$ è un autovettore di $f_k$ se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f_k(v) = \lambda v$. Abbiamo

$$f_k(v) = \lambda v \Leftrightarrow f_k(2, 3, 3) = \lambda(2, 3, 3) \Leftrightarrow (10, 5k, 6 + 3k) = (2\lambda, 3\lambda, 3\lambda).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2\lambda = 10 \\ 3\lambda = 5k \\ 3\lambda = 6 + 3k \end{cases}$$

nelle incognite $k$ e $\lambda$, si ottiene la soluzione $\lambda = 5$ e $k = 3$. Quindi $(2, 3, 3)$ è un autovettore di $f_k$ se e solo se $k = 3$.

(e) Per $k = 2$ si spieghi perché l'operatore $f_2$ è diagonalizzabile (richiamando l'enunciato dell'opportuno teorema) e si determini una base diagonalizzante per $f_2$ e ortornomale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

**Svolgimento**

Per $k = 2$ abbiamo

$$\begin{array}{cccc} f_2 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (2x + 2y, 2x + 2z, 2y + 2z). \end{array}$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ (si ricorda che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard). La matrice associata a $f_2$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $A_2$ è una matrice simmetrica, l'operatore $f_2$ è simmetrico ed è quindi diagonalizzabile per il teorema spettrale. Il *teorema spettrale* infatti afferma che se $V$ è uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita e $f : V \to V$ è un operatore lineare di $V$, allora esiste una base ortonormale di $V$ e diagonalizzante per $f$.

Per determinare tale base, cominciamo con il determinare gli autovalori di $f_2$, trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-T & 2 & 0 \\ 2 & -T & 2 \\ 0 & 2 & 2-T \end{vmatrix} &= -T^3 + 4T^2 + 4T - 16 = -T^2(T - 4) + 4(T - 4) \\ &= (T - 4)(T^2 - 4) = (T - 4)(T - 2)(T + 2). \end{aligned}$$

Pertanto gli autovalori di $f_2$ sono -2, 2, e 4, tutti di molteplicità algebrica 1. Per ognuno di essi determiniamo l'autospazio corrispondente:

- $V_{-2}(f_2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(1, -2, 1)\}.$

- $V_2(f_2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(-1, 0, 1)\}.$

- $V_4(f_2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(1, 1, 1)\}.$

Sia $\mathcal{B}' = \{(1, -2, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ l'unione delle basi dei tre autospazi $V_{-2}(f_2)$, $V_2(f_2)$ e $V_4(f_2)$. Allora $\mathcal{B}'$ è una base diagonalizzante per $f_2$. Inoltre $\mathcal{B}'$ è ortogonale in quanto gli autovalori di $f_2$ sono tutti distinti. Per ottenere da $\mathcal{B}'$ una base $\mathcal{B}''$ diagonalizzante per $f_2$ e ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$ basterà dividere ciascun vettore di $\mathcal{B}'$ per la sua norma. Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}'' &= \left\{\frac{(1,-2,1)}{\|(1,-2,1)\|}, \frac{(-1,0,1)}{\|(-1,0,1)\|}, \frac{(1,0,1)}{\|(1,1,1)\|}\right\} \\ &= \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.\end{aligned}$$