Geometria e Algebra - MIS-Z

Primo Appello

22/06/2022

Nome e Cognome: ____________________

Corso di Laurea: ____________________

Matricola: ____________________

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	**Punteggio**

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$U_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z + k = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(b) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora $\det(AB) \neq 0$ se e solo se A e B sono entrambe invertibili.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(c) Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1,2,3) = (1,2), \qquad f(3,2,1) = (3,4), \qquad \text{e} \qquad f(4,4,4) = (5,6).$$

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(d) Sia V uno spazio euclideo con prodotto scalare $\langle \, , \, \rangle$. Siano $v, w \in V$ entrambi non nulli. Se v e w sono linearmente dipendenti allora $\langle v, w \rangle \neq 0$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

(a) Si enunci il teorema di Rouché–Capelli.

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} 3Y - kZ = 1 \\ X - Y - Z = 0 \\ kX + Y - 4Z = 1 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**

(c) Si determinino i valori di k per i quali i piani dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$

$$3Y - kZ = 1 \qquad X - Y - Z = 0 \qquad \text{e} \qquad kX + Y - 4Z = 1$$

si intersecano in una retta r e per tali valori si trovino le equazioni parametriche di r.

ESERCIZIO 3 [7 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano π_1 passante per i punti $A(0,1,1)$, $B(2,0,-2)$ e $C(2,1,-1)$ di $\mathbb{E}^3$.

(b) Sia $h \in \mathbb{R}$. Nella famiglia di rette di $\mathbb{E}^3$ definite dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X + (h+1)Y + Z = 2h \\ hX - Z = 2 \end{cases}$$

si determini la retta r passante per il punto $(1,1,0)$.

(c) Si mostri che la retta r non è contenuta nel piano π_1.

(d) Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che il piano definito dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2ks - 2t + k \\ y = 2s + kt \\ z = 3t + 3 \end{cases} \quad , \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

sia parallelo a π_1.

(e) Per i valori di k trovati in (d) si calcoli la distanza del piano corrispondente dal piano π_1.

ESERCIZIO 4 [6 punti]. **Prodotto scalare e sottospazio ortogonale.**

(a) Sia V uno spazio vettoriale reale. Si definisca quando una funzione

$$\begin{array}{rccc} \langle\, , \rangle : & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (v, w) & \mapsto & \langle v, w \rangle \end{array}$$

è detta un prodotto scalare su V.

(b) Sia V uno spazio euclideo munito del prodotto scalare $\langle\, , \rangle$. Sia $v \in V$. Si mostri che l'insieme dei vettori ortogonali a v, denotato $v^{\perp}$, è un sottospazio vettoriale di V.

(c) Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard e sia $v = (2, -1, -2, -2)$. Si determini una base del sottospazio $v^\perp$.

(d) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $W_a := Span\{(1, 2, 3, a)\}$. Si determinino i valori di a tali che

$$\mathbb{R}^4 = v^\perp \oplus W_a,$$

dove $v^\perp$ è il sottospazio trovato al punto (c).

ESERCIZIO 5 [9 punti]. **Una famiglia di endomorfismi di $\mathbb{R}^3$.**

Per $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x+2y, kx+kz, 2y+kz). \end{array}$$

(a) Si determinino i valori di k per cui f_k non è un automorfismo.

(b) Per uno dei valori di k trovati in (a) si determini una base di $\ker(f_k)$ e di $\operatorname{Im}(f_k)$.

(c) Si richiami la definizione di autovettore e di autovalore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale.

(d) Si determinino i valori di k per cui il vettore $(2, 3, 3)$ è un autovettore di f_k. Per tali valori di k si determini l'autovalore corrispondente.

(e) Per $k = 2$ si spieghi perché l'operatore f_2 è diagonalizzabile (richiamando l'enunciato dell'opportuno teorema) e si determini una base diagonalizzante per f_2 e ortornomale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.