Geometria e Algebra - MIS-Z

Secondo appello - Luglio

19/07/2022

Nome e Cognome: ______________________________

Corso di laurea: ______________________________

Matricola: ______________________________

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) La matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

è invertibile.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(b) I punti del piano euclideo $A(-2,0)$, $B(2,0)$ e $C(0,2\sqrt{3})$ sono i vertici di un triangolo equilatero.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(c) Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^{2021} \to \mathbb{R}^{2022}$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(d) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

(a) Si dimostri il seguente enunciato:

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$AX = b,$$

dove $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $b \in M_{m,1}(K)$ *e* $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, *è compatibile se e solo se* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} -X_1 + 2X_3 + kX_4 = 2 \\ X_1 + 3X_2 - X_3 + 5X_4 = -k \\ -X_1 + 6X_2 + k^2X_3 + 4X_4 = 2 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**

ESERCIZIO 3 [8 punti]. **Un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.**

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato alla seguente matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini una base di $\ker(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Si mostri che $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

(c) Si determini se f è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base diagonalizzante.

(d) Si determini una matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale e si calcoli P^{-1}.

ESERCIZIO 4 [7 punti]. **Sottospazi vettoriali.**

(a) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Si definisca quando un sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale di V

(b) Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Dopo aver mostrato che il sottoinsieme W delle matrici 2×2 triangolari superiori è un sottospazio vettoriale di V, se ne determini la dimensione e una base.

(c) Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + 2b + 3d = 0 \text{ e } b = c \right\}.$$

(d) Si determini una base di $U + W$ e $U \cap W$.

(e) Sia D il sottospazio delle matrici diagonali di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. È vero che $U \cap W = D$? Si giustifichi la risposta.

ESERCIZIO 5 [7 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per i punti $A(1,2,1)$ e $B(2,1,2)$ di $\mathbb{E}^3$.

(b) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determini la posizione reciproca delle rette r e s_h, dove s_h è definita dalle equazioni cartesiane

$$s_h : \begin{cases} hX + Y - 3Z = 3 \\ -X + Y + 2Z = h \end{cases} .$$

Per i valori di h per cui r e s_h sono incidenti si determini il punto di intersezione.

(c) Sia s_0 la retta descritta dalle equazioni in (b) per $h = 0$. Si determinino un'equazione cartesiana del piano π parallelo a r e s_0 passante per il punto $P\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$.

(d) Si mostri che il piano π è equidistante da r e s_0.