Geometria e Algebra - MIS-Z

Quarto appello - Ottobre - Soluzioni

14/10/2022

Nome e Cognome: ______________________________

Corso di laurea: ______________________________

Matricola: ______________________________

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) Il vettore $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ è combinazione lineare dei vettori $(1,-2,1)$ e $(-2,4,-2)$.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Notiamo che $(-2,4,-2) = -2(1,-2,1)$. Se il vettore $(1,2,3)$ fosse combinazione lineare dei vettori $(1,-2,1)$ e $(-2,4,-2)$ allora esisterebbero $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$(1,2,3) = a(1,-2,1) + b(-2,4,-2) = a(1,-2,1) - 2b(1,-2,1) = (a-2b)(1,-2,1),$$

ovvero $(1,2,3)$ sarebbe collineare al (multiplo del) vettore $(1,-2,1)$. Ma questo è chiaramente falso, quindi $(1,2,3)$ non è combinazione lineare di $(1,-2,1)$ e $(-2,4,-2)$.

(b) La funzione

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (x^2,y^2) \end{array}$$

è un'applicazione lineare.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Si considerino in $\mathbb{R}^2$ i vettori $v = (1,0)$ e $w = (1,1)$. Allora si ha:

$$f(v+w) = f(2,1) = (4,1)$$

$$f(v) + f(w) = (1,0) + (1,1) = (2,1).$$

Poiché $f(v+w) \neq f(v) + f(w)$, l'applicazione f non è lineare.

(c) Sia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare suriettiva. Allora $\dim(\ker(f)) = 3$.

■ **VERO**

□ **FALSO**

Giustificazione

Per il teorema del rango abbiamo:

$$\dim(\ker(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(f).$$

Essendo f suriettiva, allora $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}) = 1$. Inoltre $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$. Quindi $\dim(\ker(f)) = 4 - 1 = 3$.

(d) Siano $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e sia O_2 la matrice nulla di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se $AB = O_2$, allora $A = O_2$ o $B = O_2$.

□ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora $AB = O_2$, ma sia A che B sono diverse dalla matrice nulla.

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} X + kY + Z = k \\ X + Y + Z = 2 \\ kX + Y + kZ = 2 \\ X + kY + (k-2)Z = 3 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**
$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	NO	0	–
$k = 0$	SI	1	{(1,2,-1)}

Svolgimento

Consideriamo la matrice orlata associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ k & 1 & k & 2 \\ 1 & k & k-2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 - kR_1$,
3. $R_4 \leftarrow R_4 - R_1$,
4. $R_3 \leftarrow R_3 - (1+k)R_2$,
5. $R_3 \leftrightarrow R_4$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k \\ 0 & 1-k & 0 & 2-k \\ 0 & 0 & k-3 & 3-k \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}.$$

Notiamo subito che se $k \neq 0$ il sistema non è compatibile, poiché l'ultima riga corrisponde all'equazione $0 = k$ (si può anche facilmente notare che in tal caso la matrice dei coefficienti ha rango diverso dalla matrice orlata). Vediamo pertanto cosa succede per $k = 0$. Se $k = 0$ allora la matrice a scalini è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso il rango della matrice dei coefficienti e il rango della matrice orlata coincidono e sono uguali a 3. Quindi, per il teorema di Rouché–Capelli, il sistema è compatibile ed ammette l'unica soluzione $(1, 2, -1)$.

ESERCIZIO 3 [8 punti]. **Sottospazi vettoriali.**

(a) Enunciare il lemma di Steinitz.

Lemma

Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e siano $w_1, \ldots, w_m \in V$. Se $w_1, \ldots, w_m$ sono linearmente indipendenti, allora $m \leq n$.

(b) Dimostrare che se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ sono due basi di uno spazio vettoriale V allora $n = m$.

Dimostrazione

Applichiamo il lemma di Steinitz da due punti di vista diversi:

- Poiché $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base e $w_1, \ldots, w_m$ sono linearmente indipendenti, allora, applicando il lemma di Steinitz, otteniamo che $m \leq n$;
- Poiché $\{w_1, \ldots, w_m\}$ è una base e $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, allora, applicando il lemma di Steinitz, otteniamo che $n \leq m$.

Quindi $m \leq n$ e $n \leq m$, da cui $m = n$.

(c) In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale

$$U = Span\{(0,1,-1,4),(-1,0,2,-2),(-1,1,1,2),(2,-3,-1,-8)\}.$$

Si determini una base e la dimensione di U.

Svolgimento

Per determinare una base e la dimensione di U ci basterà ridurre a gradini la matrice che ha per righe i quattro vettori che generano U:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_1 \leftrightarrow R_2$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$,
3. $R_4 \leftarrow R_4 + 2R_1$,
4. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,
5. $R_4 \leftarrow R_4 + 3R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la dimensione di U è 2 (numero di righe non nulle) e una base è $\{(-1,0,2,-2),(0,1,-1,4)\}$ (le righe non nulle della matrice ridotta a scalini).

(d) Al variare di k in $\mathbb{R}$, si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$V_k = Span\{(1,k,0,-6),(-4,2,6,k+2)\}.$$

Determinare, se esistono, i valori di k per cui $V_k = U$.

Svolgimento

Notiamo innanzitutto che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, $\dim(V_k) = 2$. Pertanto $V_k = U$ se e solo se $V_k \subseteq U$ o, equivalentemente, se e solo se $U + V_k = U$. Poiché $U \subseteq U + V_k$ e $\dim(U) = 2$, basterà allora determinare i valori di k per cui $\dim(U + V_k) = 2$.
Ora il sottopazio $U + V_k$ è generato dall'unione delle basi di U e di V_k, ovvero

$$U + V_k = Span\{(0,1,-1,4),(-1,0,2,-2),(1,k,0,-6),(-4,2,6,k+2)\}.$$

Per calcolare la dimensione di $U + V_k$ basterà calcolare il rango della matrice

$$M_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & k & 0 & -6 \\ -4 & 2 & 6 & k+2 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$,
2. $R_3 \leftarrow R_4 - 4R_1$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 - kR_2$,
4. $R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2+k & -4k-8 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}.$$

Quindi il rango di M_k è 2 se e solo se $k = -2$. Ne segue che l'unico valore di k per cui $U = V_k$ è $k = -2$.

(e) Si completi la base di U trovata al punto (c) a una base di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento

Sappiamo che $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Quindi per completare $\{(-1, 0, 2, -2), (0, 1, -1, 4)\}$ a una base di $\mathbb{R}^4$ è sufficiente determinare due vettori di $\mathbb{R}^4$ che formino con $(-1, 0, 2, -2)$ e $(0, 1, -1, 4)$ un insieme di vettori linearmente indipendenti. In particolare basterà scegliere i vettori della base canonica $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$. Infatti in tal caso la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è già a scalini ed ha rango 4. Pertanto i vettori $(-1, 0, 2, -2)$, $(0, 1, -1, 4)$, $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti e costituiscono quindi una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene $\{(-1, 0, 2, -2), (0, 1, -1, 4)\}$.

ESERCIZIO 4 [7 punti]. **Un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.**

Per $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f_k: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (3x+y, 2kx-y, 4x+8y+kz). \end{array}$$

(a) Si determini, se esiste, un valore di k tale che $(3,-9,-40) \in \ker(f_k)$.

Svolgimento

Il vettore $(3,-9,-40)$ appartiene a $\ker(f_k)$ se e solo se

$$f_k(3,-9,-40) = (0,0,0) \Leftrightarrow (0, 6k+9, -60-40k) = (0,0,0) \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}.$$

(b) Si determini, se esiste, un valore di k tale che $(-1,1,12) \notin \operatorname{Im}(f_k)$.

Svolgimento

Sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2k & -1 & 0 \\ 4 & 8 & k \end{pmatrix}.$$

Se il vettore $(-1,1,12)$ non appartiene a $\operatorname{Im}(f_k)$, allora $\operatorname{Im}(f_k) \neq \mathbb{R}^3$, ovvero f_k non è suriettivo. Ciò avviene se e solo se $\operatorname{rg}(A_k) < 3$, ovvero se e solo se $\det(A_k) = 0$. Abbiamo

$$\det(A_k) = -2k^2 - 3k = -k(2k+3),$$

quindi f_k non è suriettivo se e solo se $k = 0$ o $k = -\frac{3}{2}$.
Se $k = 0$ allora $\operatorname{Im}(f_k) = Span\{(3,0,4),(1,-1,8)\}$. Allora $(-1,1,12)$ non appartiene a $\operatorname{Im}(f_k)$ se e solo se i vettori $(3,0,4),(1,-1,8)$ e $(-1,1,12)$ sono linearmente indipendenti. Consideriamo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si può facilmente verificare che $\det(M) \neq 0$, per cui i vettori $(3,0,4),(1,-1,8)$ e $(-1,1,12)$ sono linearmente indipendenti. Ne segue che per $k = 0$ il vettore $(-1,1,12)$ non appartiene a $Im(f_k)$.

(c) Per $k = -2$, si determini se f_{-2} è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base diagonalizzante.

Svolgimento

Per $k = -2$ abbiamo

$$\begin{array}{rccc} f_{-2}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (3x+y, -4x-y, 4x+8y-2z). \end{array}$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. La matrice associata a f_{-2} rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per studiare la diagonalizzabilità di f_{-2} cominciamo con il determinare gli autovalori di f_{-2}, trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$P_{f_{-2}}(T) = \begin{vmatrix} 3-T & 1 & 0 \\ -4 & -1-T & 0 \\ 4 & 8 & -2-T \end{vmatrix} = -T^3 + 3T - 2 = -(T-1)^2(T+2).$$

Pertanto gli autovalori di f sono -2 con molteplicità algebrica 1 e 1 con molteplicità algebrica 2. Determiniamo innanzitutto l'autospazio relativo a 1:

$$V_1(f_{-2}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(-1,2,4)\}.$$

Poiché $V_1(f_{-2})$ ha dimensione 1, segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 non coincide con quella algebrica. Pertanto l'endomorfismo f_{-2} non è diagonalizzabile.

(d) Un endomorfismo di uno spazio vettoriale V si dice *triangolabile* se esiste una base di V rispetto alla quale la matrice rappresentativa dell'endomorfismo è triangolare superiore. Si mostri che f_{-2} è triangolabile.

Svolgimento

Nel punto precedente abbiamo visto che $\{(-1,2,4)\}$ è una base dell'autospazio $V_1(f_{-2})$. Determiniamo una base dell'autospazio $V_{-2}(f_{-2})$:

$$V_{-2}(f_{-2}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(0,0,1)\}.$$

Basterà allora scegliere un qualsiasi vettore v tale che $(-1,2,4),(0,0,1)$ e v sono linearmente indipendenti e la base $\mathcal{B}' = \{(-1,2,4),(0,0,1),v\}$ è tale che $M_{\mathcal{B}'}(f_{-2})$ è triangolare superiore.
Ad esempio, scegliendo $v = (1,0,0)$, è facile verificare che $\mathcal{B}' = \{(-1,2,4),(0,0,1),(1,0,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Inoltre abbiamo:

$$f_{-2}(1,0,0) = (3,-4,4) = -2\cdot(-1,2,4) + 12\cdot(0,0,1) + 1\cdot(1,0,0).$$

Si ottiene che

$$M_{\mathcal{B}'}(f_{-2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice triangolare superiore e quindi f_{-2} è triangolabile.

ESERCIZIO 5 [7 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r_1 di $\mathbb{E}^3$ passante per i punti $A(1,1,0)$ e $B(3,0,-1)$.

Svolgimento

Per scrivere le equazioni parametriche di r_1 abbiamo bisogno di un punto della retta e di un vettore direttore. Scegliamo:

- Punto: $A(1,1,0)$;
- Vettore direttore: $\overrightarrow{AB} = (2,-1,-1)$.

Quindi le equazioni parametriche di r_1 sono

$$r_1 : \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t+1 \\ z = -t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Si consideri la retta r_2 descritta dalle equazioni cartesiane

$$r_2 : \begin{cases} X+Y-1=0 \\ Y+Z-3=0. \end{cases}$$

Determinare la posizione reciproca di r_1 e r_2 e, se possibile, determinare il piano π che le contiene entrambe.

Svolgimento

Innanzitutto determiniamo le equazioni cartesiane di r_1, ricavando t dall'ultima equazione e sostituendola nelle prime due:

$$\begin{cases} t = -z \\ x = -2z+1 \\ y = z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -z \\ x+2z-1 = 0 \\ y-z-1 = 0. \end{cases}$$

Le equazioni cartesiane di r_1 sono quindi:

$$r_1 : \begin{cases} X+2Z-1=0 \\ Y-Z-1=0. \end{cases}$$

Sia dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti delle equazioni cartesiane di r_1 e r_2. Si può calcolare facilmente che $\det(A) = 0$, per cui r_1 e r_2 sono complanari.

Inoltre, sistema

$$\begin{cases} X+2Z-1=0 \\ Y-Z-1=0 \\ X+Y-1=0 \\ Y+Z-3=0, \end{cases}$$

possiede l'unica soluzione $(-1,2,1)$. Quindi r_1 e r_2 sono incidenti e si intersecano nel punto $P(-1,2,1)$.
Per determinare il piano π che contiene sia r_1 che r_2 consideriamo il punto di intersezione $P(-1,2,1)$, il punto $A(1,1,0) \in r_1$ e un punto qualsiasi di r_2 diverso da P, ad esempio $C(0,1,2)$. Baserà allora determinare il piano passante per i punti A, P e C. Abbiamo $\overrightarrow{PA} = (2,-1,-1)$ e $\overrightarrow{PC} = (1,-1,1)$, quindi le equazioni parametriche di π sono:

$$\pi : \begin{cases} x = 2s+t-1 \\ y = -s-t+2 \\ z = -s+t+1 \end{cases}, \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

(c) Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri il piano π_k definito dall'equazione cartesiana

$$\pi_k : k^2X + (k+4)Y + kZ + k - 1 = 0.$$

Si determinino il/i valore/i di k tali che π_k sia parallelo al piano π trovato al punto (b) e per tale/i valore/i si calcoli la distanza tra i due piani.

Svolgimento

Innanzitutto determiniamo un'equazione cartesiana di π. Calcoliamo un vettore normale a π facendo il prodotto vettoriale di $\overrightarrow{PA} = (2,-1,-1)$ per $\overrightarrow{PC} = (1,-1,1)$:

$$v = (2,-1,-1) \times (1,-1,1) = (-2,-3,-1).$$

Un'equazione cartesiana di π è dunque della forma $-2X-3Y-Z+d=0$. Imponendo il passaggio per P otteniamo $d=5$, e quindi

$$\pi : 2X - 3Y - Z + 5 = 0.$$

Dall'equazione cartesiana di π_k vediamo facilmente che un vettore normale è dato da $w_k = (k^2, k+4, k)$.
Ora i piani π_k e π sono paralleli se e solo se v e w_k sono collineari, ovvero, se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $w_k = \lambda v$. Abbiamo

$$w_k = \lambda v \Leftrightarrow (k^2, k+4, k) = \lambda(-2,-3,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 = -2\lambda \\ k+4 = -3\lambda \\ k = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 = 2k \\ k+4 = 3k \\ k = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow k = 2.$$

Quindi π_k è parallelo a π se e solo se $k=2$, per cui si ottiene:

$$\pi_2 : 4X + 6Y + 2Z + 1 = 0.$$

Sia $P(-1,2,1) \in \pi$. La distanza tra π e π_2 è data dalla distanza di P da π_2:

$$d(\pi, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{-4+12+2+1}{\sqrt{4^2+6^2+2^2}} = \frac{11}{\sqrt{56}} = \frac{11\sqrt{14}}{28}.$$