Geometria e Algebra - MIS-Z

Quinto appello - Gennaio - Soluzioni

17/01/2023

Nome e Cognome: ____

Corso di laurea: ____

Matricola: ____

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

■ **VERO**

□ **FALSO**

Giustificazione

Si calcola facilmente che $\det(A) = -9 \neq 0$. Quindi A è invertibile.

(b) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $f(1,0,1) = (0,1)$ e $f(0,1,0) = (2,3)$. Allora $f(1,1,1) = (4,5)$.

□ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Se $f(1,0,1) = (0,1)$ e $f(0,1,0) = (2,3)$, allora, essendo f lineare, si ha:
$f(1,1,1) = f((1,0,1)+(0,1,0)) = f(1,0,1)+f(0,1,0) = (0,1)+(2,3) = (2,4) \neq (4,5)$.

(c) La retta $r \subseteq \mathbb{E}^3$ di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t \\ z = -2t + 2 \end{cases} , \qquad t \in \mathbb{R}$$

passa per il punto $(1, 3, 2)$.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

La retta r passa per il punto $(1, 3, 2)$ se e solo se il sistema

$$r : \begin{cases} 1 = -t + 2 \\ 3 = 3t \\ 2 = -2t + 2 \end{cases}$$

ammette una soluzione in $\mathbb{R}$.
Dalle prime due equazioni si ottiene $t = 1$, mentre dalla terza $t = 0$. Poiché non esiste un valore di t che è soluzione simultanea delle tre equazioni, concludiamo che il sistema non è compatibile e quindi che la retta r non passa per il punto $(1, 3, 2)$.

(d) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathrm{id}_V : V \to V$ l'applicazione identità. Allora id_V è diagonalizzabile.

■ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

Poiché $\mathrm{id}_V(v) = v$ per ogni $v \in V$, scelta una qualsiasi base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, si ha che $M_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = I_n$ è diagonale. Pertanto id_V è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} X + 3Y - Z = 0 \\ kX + Y + 3Z = 1 \\ -8Y + 2kZ = 1 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**
$k \in \mathbb{R} \setminus \left\{3, -\frac{4}{3}\right\}$	SI	1	$\left\{\left(\frac{3}{3k+4}, -\frac{1}{6k+8}, \frac{3}{6k+8}.\right)\right\}$
$k = 3$	SI	∞^1	$\left\{\left(\frac{-10t+3}{8}, \frac{6t-1}{8}, t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$.
$k = -\frac{4}{3}$	NO	0	-

Svolgimento

Consideriamo la matrice dei coefficienti A e la matrice orlata $(A|b)$ associate al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 2k \end{pmatrix}, \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ k & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 2k & 1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo innanzitutto i valori di k tali che $\det(A) \neq 0$. Infatti per tali valori avremo $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3$ e quindi, per Rouché–Capelli, il sistema sarà compatibile ed ammetterà un'unica soluzione che determineremo con il metodo di Cramer. Abbiamo

$$\det(A) = -6k^2+10k+24 = -2(3k^2-5k-12) = -2(k-3)(3k+4) = 0 \Leftrightarrow k = 3 \text{ o } k = -\frac{4}{3}.$$

<u>CASO 1</u>. Sia dunque $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{3, -\frac{4}{3}\right\}$. Applicando il metodo di Cramer otteniamo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -8 & 2k \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{18-6k}{-2(k-3)(3k+4)} = \frac{-6(k-3)}{-2(k-3)(3k+4)} = \frac{3}{3k+4}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2k \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{k-3}{-2(k-3)(3k+4)} = -\frac{1}{6k+8}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{9-3k}{-2(k-3)(3k+4)} = \frac{-3(k-3)}{-2(k-3)(3k+4)} = \frac{3}{6k+8}.$$

Quindi per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{3, -\frac{4}{3}\}$ l'insieme delle soluzioni è

$$S_k = \left\{\left(\frac{3}{3k+4}, -\frac{1}{6k+8}, \frac{3}{6k+8}.\right)\right\}.$$

CASO 2. Se $k = 3$ allora la matrice orlata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In tal caso abbiamo quindi $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(A|b)$. Dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema è compatibile ed ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Scegliendo Z come variabile libera otteniamo l'insieme di soluzioni

$$S_3 = \left\{ \left(\frac{-10t+3}{8}, \frac{6t-1}{8}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

CASO 3. Se $k = -\frac{4}{3}$ allora la matrice orlata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -\frac{8}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_2 \leftarrow R_2 + \frac{4}{3}R_1$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 + \frac{8}{5}R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{5} \end{pmatrix}.$$

In tal caso abbiamo quindi $\mathrm{rg}(A) = 2$ e $\mathrm{rg}(A|b) = 3$. Dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema è incompatibile.

ESERCIZIO 3 [8 punti]. **Sottospazi vettoriali.**

(a) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Si definisca quando un sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Un sottoinsieme $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V se:

- $W \neq \emptyset$;
- $\forall\ \lambda, \mu \in K$, $\forall\ w_1, w_2 \in W$ si ha $\lambda w_1 + \mu w_2 \in W$.

(b) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e siano U e W due sottospazi vettoriali di V. Dimostrare che $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione

Mostriamo che $U \cap W$ soddisfa le proprietà di sottospazio vettoriale definite nel punto (a).

- Essendo U e W entrambi sottospazi vettoriali di V abbiamo che $0_V \in U$ e $0_V \in W$. Quindi $0_V \in U \cap W$ e in particolare $U \cap W \neq \emptyset$.
- Siano $v_1, v_2 \in U \cap W$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Allora, poiché $v_1, v_2 \in U$ e U è un sottospazio vettoriale di V, si ha $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$. In modo analogo si ottiene che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W$. Quindi $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U \cap W$.

(c) In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio vettoriale

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si determini una base e la dimensione di U.

Svolgimento

Osserviamo che

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un sistema di generatori di U. Inoltre le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di U e U ha dimensione 2.

(d) Sia $D \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale delle matrici diagonali 2×2. Si determini una base e la dimensione di $U \cap D$.

Svolgimento

Abbiamo

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il sottospazio $U \cap D$ è costituito dalle matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che

$$\begin{cases} a = b \\ b = 0 \\ c = d \\ c = 0 \end{cases},$$

ossia solo dalla matrice nulla $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Quindi $U \cap D = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$ e $\dim(U \cap D) = 0$. In particolare una base di $U \cap D$ è data dall'insieme vuoto.

(e) Stabilire se $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = U \oplus D$, giustificando la risposta.

Svolgimento

È facile vedere che $\dim(D) = 2$. Utilizzando la formula di Grassmann otteniamo:

$$\dim(U + D) = \dim(U) + \dim(D) - \dim(U \cap D) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

Quindi, essendo $U+D \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ e $\dim(U+D) = 4$, abbiamo $U+D = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Inoltre abbiamo visto nel punto (c) che $U \cap D = \left\{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$. Concludiamo che $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = U \oplus D$.

ESERCIZIO 4 [7 punti]. **Un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.**

(a) Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z,w) & \mapsto & (2z, 2x+y+2z-3w, -2z, 2x+2z-2w). \end{array}$$

(a1) Si stabilisca se f è un automorfismo, giustificando la risposta.

Svolgimento

Sia A la matrice associata a f rispetto alla base canonica. Dall'espressione di f abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che f è un automorfismo se e solo se $\mathrm{rg}(A) = 4$, ovvero se e solo se $\det(A) \neq 0$. Si calcola facilmente che $\det(A) = 0$, quindi f <u>non</u> è un automorfismo.

(a2) Si determini se f è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base diagonalizzante.

Svolgimento

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. La matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per studiare la diagonalizzabilità di f determiniamo innanzitutto gli autovalori di f, calcolando le radici del polinomio caratteristico:

$$P_f(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1-T & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2-T & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2-T \end{vmatrix} = T^4 + 3T^3 - 4T = T(T-1)(T+2)^2.$$

Pertanto gli autovalori di f sono 0 con molteplicità algebrica 1, 1 con molteplicità algebrica 1 e -2 con molteplicità algebrica 2. Per ognuno di essi determiniamo l'autospazio corrispondente.

$$V_{-2}(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(0,1,0,1), (-1,0,1,0)\}.$$

$$V_0(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(1,1,0,1)\}.$$

$$V_1(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(0,1,0,0)\}.$$

Poiché $\dim(V_{-2}(f)) = 2$, $\dim(V_0(f)) = 1$ e $\dim(V_1(f)) = 1$, la moltiplicità algebrica e geometrica di -2, di 0 e di 1 coincidono. Ne segue che l'operatore f è diagonalizzabile e l'unione delle basi dei tre autospazi $V_{-2}(f)$, $V_0(f)$ e $V_1(f)$

$$\mathcal{B}' = \{(0,1,0,1), (-1,0,1,0), (1,1,0,1), (0,1,0,0)\}$$

è una base diagonalizzante per f.

(b) Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione finita e sia $g : V \to V$ un endomorfismo. Si dimostri che se g non è un automorfismo allora 0 è un autovalore di g.

Svolgimento

Per il teorema del rango, se g non è un automorfismo, allora g non è iniettivo. Quindi $\ker(g) \neq \{0_V\}$, ossia esiste $v \neq 0_V$ tale che $g(v) = 0_V$. Poiché $0_V = 0 \cdot v$, abbiamo $g(v) = 0 \cdot v$. Quindi 0 è un autovalore di g.

ESERCIZIO 5 [7 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $A(1,1,-4)$, $B(0,0,1)$ e $C(-1,2,0)$ di $\mathbb{E}^3$.

Svolgimento

Per scrivere le equazioni parametriche di π abbiamo bisogno di un punto del piano e di due vettori non collineari della giacitura. Scegliamo:

- Punto: $B(0,0,1)$
- Vettori non collineari della giacitura: $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,5)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2,1,4)$

Quindi

$$\pi : \begin{cases} x = -s - 2t \\ y = -s + t \\ z = 5s + 4t + 1 \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana di π ricaviamo s e t dalle prime due equazioni e le sostituiamo nell'ultima:

$$\begin{cases} s = -x - 2t \\ t = y + s \\ z = 5s + 4t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -x - 2y - 2s \\ t = y + s \\ z = 5s + 4t + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = \frac{-x-2y}{3} \\ t = y + \frac{-x-2y}{3} = \frac{-x+y}{3} \\ z = 5 \cdot \frac{-x-2y}{3} + 4 \cdot \frac{-x+y}{3} + 1 = -3x - 2y + 1 \end{cases} \Rightarrow 3x + 2y + z - 1 = 0.$$

Un'equazione cartesiana di π è quindi:

$$\pi : 3X + 2Y + Z - 1 = 0.$$

(b) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determini la posizione reciproca della retta r_h e del piano π, dove r_h è definita dalle equazioni parametriche

$$r_h : \begin{cases} x = ht + 1 \\ y = 3t - h \\ z = -ht - 2 \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Per i valori di h per cui r_h e π sono incidenti si determini il punto di intersezione.

Svolgimento

Ricordiamo che una retta e un piano possono essere paralleli o incidenti. In particolare sono paralleli se e solo se la giacitura della retta è contenuta nella giacitura del piano. La giacitura della retta r_h è data dallo spazio vettoriale

$$W_{r_h} = Span\{(h, 3, -h)\},$$

mentre per quanto visto nel punto (a) la giacitura del piano π è data dallo spazio vettoriale

$$W_\pi = Span\{(-1, -1, 5), (-2, 1, 4)\}.$$

Osserviamo che $W_{r_h} \subseteq W_\pi$ se e solo se i vettori $(h, 3, -h), (-1, -1, 5), (-2, 1, 4)$ sono linearmente indipendenti, ovvero se e solo se $\begin{vmatrix} h & 3 & -h \\ -1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

Abbiamo

$$\begin{vmatrix} h & 3 & -h \\ -1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6h - 18 = 0 \Leftrightarrow h = -3.$$

Quindi r_h e π sono paralleli se e solo se $h = -3$. Rimane da stabilire se r_{-3} e π sono paralleli disgiunti o se $r_{-3} \subseteq \pi$. Si mostra facilmente che il punto $(1, 3, -2) \in r_{-3}$ non appartiene a π, quindi r_{-3} e π sono paralleli disgiunti.

Per $h \neq -3$, la retta r_h e il piano π sono incidenti. Determiniamo il punto di intersezione sostituendo le equazioni parametriche di r_h nell'equazione cartesiana di π:

$$3(ht + 1) + 2(3t - h) + (-ht - 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow (2h + 6)t - 2h = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2h}{2h + 6}.$$

Sostituendo $t = \frac{2h}{2h+6}$ nelle equazioni parametriche di r_h troviamo le coordinate del punto di intersezione:

$$\begin{cases} x = h\frac{2h}{2h+6} + 1 = \frac{2h^2+2h+6}{2h+6} \\ y = 3\frac{2h}{2h+6} - h = \frac{-2h^2}{2h+6} \\ z = -h\frac{2h}{2h+6} - 2 = \frac{-2h^2-4h-12}{2h+6} \end{cases} ,$$

ovvero $r_h \cap \pi = \left\{ \left(\frac{2h^2+2h+6}{2h+6}, \frac{-2h^2}{2h+6}, \frac{-2h^2-4h-12}{2h+6} \right) \right\}$.

(c) Sia h_0 il valore di h, trovato al punto (b), per cui r_{h_0} e π sono paralleli. Si determini una retta s contenuta nel piano π e parallela alla retta r_{h_0}.

Svolgimento

Sia $h_0 = -3$. Poiché r_{-3} e π sono paralleli, una retta contenuta in π e parallela a r_{-3} è determinata dal vettore direttore $(-3, 3, 3)$ di r_{-3} e da un qualsiasi punto di π. Consideriamo ad esempio $P(0, 0, 1) \in \pi$. Allora una retta s contenuta nel piano π e parallela alla retta r_{-3} è

$$s : \begin{cases} x = -3t \\ y = 3t \\ z = 3t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$