Geometria e Algebra - MIS-Z

Primo Esonero

26/04/2022

Nome e Cognome: ______________________

Corso di Laurea: ______________________

Matricola: ______________________

Informazioni

Questo esonero contiene 4 esercizi per un totale di 32 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 32$, allora il voto sarà 30eLode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 1 ora e 50 minuti. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	Punteggio

TOTALE

ESERCIZIO 1 [8 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ siano linearmente indipendenti:

$$v_1 = (1, 2, 3), \qquad v_2 = (k, k+1, k+2), \qquad v_3 = (3, 2, 1), \qquad v_4 = (1, 0, 1).$$

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

(b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile, allora per ogni $n \geq 1$ la matrice A^n è invertibile.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

(c) Siano $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

(d) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e siano U, W due sottospazi vettoriali di V tali che $\dim(U) = \dim(W) = 1$. Allora $\dim(U+W) = 2$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**
Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} kX + k^2Y = 3k \\ X - Z = 4 \\ -3k^2Y + k^2Z = 4k \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**

Svolgimento:

ESERCIZIO 3 [8 punti]. **Il sottospazio della matrici simmetriche.**

(a) Dimostrare che per ogni $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$(A+B)^T = A^T + B^T \qquad \text{e} \qquad (\lambda A)^T = \lambda(A^T).$$

(b) Si ricorda che una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si dice *simmetrica* se $A = A^T$. Si consideri dunque il sottoinsieme $U \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ costituito delle matrici simmetriche di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$U = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A \text{ è simmetrica}\}.$$

Si dimostri che U è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Si dimostri che le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di U. Dedurne la dimensione di U.

(d) Completare $\{A_1, A_2, A_3\}$ a una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 4 [10 punti]. **Polynomial time!**

(a) Si definisca quando un insieme di vettori di uno spazio vettoriale V è linearmente indipendente.

(b) Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 4}[X] := \{P(X) \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq 4\}$. Si ricorda che per convenzione si pone $\deg(0) = -1$, quindi $0 \in \mathbb{R}_{\leq 4}[X]$.
Si determini l'insieme S dei valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali i seguenti polinomi di $\mathbb{R}_{\leq 4}[X]$ sono linearmente indipendenti:

$$P_1(X) = X^3+2X^2+3X+4, \qquad P_2(X) = -2X^3+X^2-3X+2, \qquad P_3(X) = 10X^2+6X+h.$$

(c) Si consideri

$U_h = \langle X^3 + 2X^2 + 3X + 4, \quad -2X^3 + X^2 - 3X + 2, \quad 10X^2 + 6X + h\rangle \subseteq \mathbb{R}_{\leq 4}[X].$

Si mostri che per ogni $h \in S$, $1 \in U_h$. (S denota l'insieme dei valori di h trovato al punto precedente.)

(d) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}_{\leq 4}[X]$:

$$U_0 = \langle X^3 + 2X^2 + 3X + 4, \quad -2X^3 + X^2 - 3X + 2, \quad 10X^2 + 6X \rangle,$$
$$W = \langle 1\,,\ X\,,\ 3X + 2 \rangle.$$

(d1) Si determini una base di U_0 e di W e se ne deduca la dimensione di U_0 e W.

(d2) Si determini una base di $U_0 + W$ e se ne deduca la dimensione corrispondente.

(d3) $U_0 + W = \mathbb{R}_{\leq 4}[X]$? Perché?

(d4) Si enunci il teorema della formula di Grassmann.

(d5) Si determini una base di $U_0 \cap W$.