Geometria e Algebra - MIS-Z

Secondo Esonero - Soluzioni

22/06/2022

Nome e Cognome: ______________________

Corso di Laurea: ______________________

Matricola: ______________________

Informazioni

Questo esonero contiene 4 esercizi per un totale di 35 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 35$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	**Punteggio**

TOTALE

ESERCIZIO 1 [8 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) Si consideri $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard. Esiste $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori

$$(k, 1, -1) \qquad \text{e} \qquad (k, k, -2)$$

sono ortogonali.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

I vettori $(k, 1, -1)$ e $(k, k, -2)$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$ se e solo se

$$\langle (k, 1, -1), (k, k, -2) \rangle = 0 \Leftrightarrow k^2 + k + 2 = 0.$$

Ma tale equazione non ha soluzioni reali, poiché $\Delta = -8 < 0$. Quindi non esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $(k, 1, -1)$ e $(k, k, -2)$ sono ortogonali.

(b) Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1, 2, 3) = (1, 2), \qquad f(3, 2, 1) = (3, 4), \qquad \text{e} \qquad f(4, 4, 4) = (5, 6).$$

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Notiamo che $(4, 4, 4) = (1, 2, 3) + (3, 2, 1)$. Quindi, essendo f lineare, si ha:

$$f(4, 4, 4) = f((1, 2, 3) + (3, 2, 1)) = f(1, 2, 3) + f(3, 2, 1) = (1, 2) + (3, 4) = (4, 6),$$

ma questo contraddice il fatto che l'immagine di $(4, 4, 4)$ è $(5, 6)$. Ne segue che una tale applicazione lineare f non può esistere.

(c) Sia f un endormorfismo di uno spazio vettoriale V. Se 0 è un autovalore di f allora $\ker(f) \neq \{\underline{0}\}$.

■ **VERO**

□ **FALSO**

Giustificazione

Se 0 è un autovalore di f, allora esiste un vettore non nullo $v \in V$ tale che $f(v) = 0 \cdot v = 0_V$. Ma quindi $v \in \ker(f)$, con $v \neq 0_V$, da cui $\ker(f) \neq \{0_V\}$.

(d) Sia V uno spazio euclideo con prodotto scalare $\langle\, , \rangle$. Siano $v, w \in V$ entrambi non nulli. Se v e w sono linearmente dipendenti allora $\langle v, w\rangle \neq 0$.

■ **VERO**

□ **FALSO**

Giustificazione

Se v e w sono non nulli e linearmente dipendenti, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $v = \lambda w$ (si noti che λ deve essere non nullo, altrimenti si ha $v = 0_V$). Utilizzando le proprietà del prodotto scalare, abbiamo che

$$\langle v, w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle \neq 0,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\lambda \neq 0$ e $\langle w, w\rangle > 0$ per ogni $w \neq 0_V$ (un prodotto scalare è definito positivo).

ESERCIZIO 2 [9 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano π_1 passante per i punti $A(0,1,1)$, $B(2,0,-2)$ e $C(2,1,-1)$ di $\mathbb{E}^3$.

Svolgimento

Per scrivere le equazioni parametriche di π_1 abbiamo bisogno di un punto del piano e di due vettori non collineari della giacitura. Scegliamo:

- Punto: $A(0,1,1)$
- Vettori non collineari della giacitura: $\overrightarrow{AB} = (2,-1,-3)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,0,-2)$

Quindi

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 2s + 2t \\ y = -s + 1 \\ z = -3s - 2t + 1 \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana di π_1 ricaviamo s e t dalle prime due equazioni e le sostituiamo nell'ultima:

$$\begin{cases} t = \frac{x-2s}{2} = \frac{x-2+2y}{2} \\ s = 1 - y \\ z = -3s - 2t + 1 \end{cases} \Rightarrow z = -3(1-y) - (x - 2 + 2y) + 1 \Rightarrow x - y + z = 0.$$

Un'equazione cartesiana di π_1 è quindi:

$$\pi_1 : X - Y + Z = 0.$$

(b) Sia $h \in \mathbb{R}$. Nella famiglia di rette di $\mathbb{E}^3$ definite dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X + (h+1)Y + Z = 2h \\ hX - Z = 2 \end{cases}$$

si determini la retta r passante per il punto $(1,1,0)$.

Svolgimento

Determiniamo i valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che $(1,1,0)$ sia una soluzione del sistema

$$\begin{cases} X + (h+1)Y + Z = 2h \\ hX - Z = 2. \end{cases}$$

Otteniamo il sistema di incognita h

$$\begin{cases} 1 + h + 1 + 1 = 2h \\ h = 2 \end{cases}$$

che ha unica soluzione $h = 2$. Quindi la retta r cercata è:

$$r : \begin{cases} X + 3Y + Z = 4 \\ 2X - Z = 2. \end{cases}$$

(c) Si mostri che la retta r non è contenuta nel piano π_1.

Svolgimento

Basta far vedere che esiste un punto della retta r che non appartiene a π_1. Ad esempio il punto $(0,2,-2) \in r$ non appartiene a π_1 poiché non verifica l'equazione $X - Y + Z = 0$.

(d) Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che il piano definito dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2ks - 2t + k \\ y = 2s + kt \\ z = 3t + 3 \end{cases}, \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

sia parallelo a π_1.

Svolgimento

Due piani sono paralleli se e solo se due vettori a essi normali sono collineari. Dall'equazione cartesiana di π_1 ricaviamo che un vettore normale è $(1,-1,1)$. Per determinare un vettore normale al piano

$$\begin{cases} x = 2ks - 2t + k \\ y = 2s + kt \\ z = 3t + 3 \end{cases}, \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

calcoliamo il prodotto vettoriale di due vettori che ne generano la giacitura, ad esempio $(2k,2,0)$ e $(-2,k,3)$:

$$(2k,2,0) \times (-2,k,3) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ k & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2k & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2k & 2 \\ -2 & k \end{vmatrix} \right) = (6, -6k, 2k^2 + 4).$$

Notiamo che i vettori $(1,-1,1)$ e $(6,-6k,2k^2+4)$ sono collineari se e solo se $k = 1$, e quindi questo è l'unico valore di k per cui i due piani sono paralleli.

(e) Per i valori di k trovati in (d) si calcoli la distanza del piano corrispondente dal piano π_1.

Svolgimento

Il piano corrispondente a $k = 1$ è

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 2s - 2t + 1 \\ y = 2s + t \\ z = 3t + 3 \end{cases}, \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

Poiché la distanza tra π_1 e π_2 è data dalla distanza di un punto di π_2 da π_1, scegliendo $P(1,0,3) \in \pi_2$ abbiamo:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_1) = \frac{|1 - 0 + 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

ESERCIZIO 3 [10 punti]. **Una famiglia di endomorfismi di $\mathbb{R}^3$.**

Per $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (2x + 2y, kx + kz, 2y + kz). \end{array}$$

(a) Si determinino i valori di k per cui f_k non è un automorfismo.

Svolgimento

Sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica. Dall'espressione di f_k abbiamo

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ k & 0 & k \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

Allora f_k è un automorfismo se e solo se $\mathrm{rg}(A_k) = 3$, ovvero se e solo se $\det(A_k) \neq 0$. Abbiamo

$$\det(A_k) = -2k^2 - 4k,$$

quindi f_k non è un automorfismo se e solo se $k = 0$ o $k = -2$.

(b) Per uno dei valori di k trovati in (a) si determini una base di $\ker(f_k)$ e di $\mathrm{Im}(f_k)$.

Svolgimento

Scegliamo $k = 0$, per cui abbiamo $f_0(x, y, z) = (2x+2y, 0, 2y)$. Determiniamo una base di $\ker(f_0)$ e di $\mathrm{Im}(f_0)$.

- Abbiamo:

$$\begin{aligned} \ker(f_0) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_0(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2x + 2y, 0, 2y) = (0, 0, 0)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = 0\} = \\ &= Span\{(0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

  Quindi $\{(0, 0, 1\}$ è una base di $\ker(f_0)$.

- Abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f_0) &= Span\{f_0(1, 0, 0), f_0(0, 1, 0), f_0(0, 0, 1)\} = \\ &= Span\{(2, 0, 0), (2, 0, 2), (0, 0, 0)\} = \\ &= Span\{(2, 0, 0), (2, 0, 2)\}. \end{aligned}$$

  Quindi $\{(2, 0, 0\}, (2, 0, 2)\}$ è una base di $\mathrm{Im}(f_0)$.

(c) Si richiami la definizione di autovettore e di autovalore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $f : V \to V$ un endomorfismo di V. Un vettore non nullo $v \in V$ è detto *autovettore* di f se esiste $\lambda \in K$ tale che $f(v) = \lambda v$. In tal caso λ è detto l'*autovalore* relativo all'autovettore v.

(d) Si determinino i valori di k per cui il vettore $(2, 3, 3)$ è un autovettore di f_k. Per tali valori di k si determini l'autovalore corrispondente.

Svolgimento

Il vettore $v = (2, 3, 3)$ è un autovettore di f_k se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f_k(v) = \lambda v$. Abbiamo

$$f_k(v) = \lambda v \Leftrightarrow f_k(2, 3, 3) = \lambda(2, 3, 3) \Leftrightarrow (10, 5k, 6 + 3k) = (2\lambda, 3\lambda, 3\lambda).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2\lambda = 10 \\ 3\lambda = 5k \\ 3\lambda = 6 + 3k \end{cases}$$

nelle incognite k e λ, si ottiene la soluzione $\lambda = 5$ e $k = 3$. Quindi $(2, 3, 3)$ è un autovettore di f_k se e solo se $k = 3$.

(e) Per $k = 2$ si spieghi perché l'operatore f_2 è diagonalizzabile (richiamando l'enunciato dell'opportuno teorema) e si determini una base diagonalizzante per f_2 e ortornomale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento

Per $k = 2$ abbiamo

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (2x + 2y, 2x + 2z, 2y + 2z). \end{array}$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ (si ricorda che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard). La matrice associata a f_2 rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché A_2 è una matrice simmetrica, l'operatore f_2 è simmetrico ed è quindi diagonalizzabile per il teorema spettrale. Il *teorema spettrale* infatti afferma che se V è uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita e $f : V \to V$ è un operatore lineare di V, allora esiste una base ortonormale di V e diagonalizzante per f.

Per determinare tale base, cominciamo con il determinare gli autovalori di f_2, trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-T & 2 & 0 \\ 2 & -T & 2 \\ 0 & 2 & 2-T \end{vmatrix} &= -T^3 + 4T^2 + 4T - 16 = -T^2(T-4) + 4(T-4) \\ &= (T-4)(T^2-4) = (T-4)(T-2)(T+2). \end{aligned}$$

Pertanto gli autovalori di f_2 sono -2, 2, e 4, tutti di molteplicità algebrica 1. Per ognuno di essi determiniamo l'autospazio corrispondente:

- $V_{-2}(f_2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(1, -2, 1)\}.$

- $V_2(f_2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(-1, 0, 1)\}.$

- $V_4(f_2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(1, 1, 1)\}.$

Sia $\mathcal{B}' = \{(1, -2, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ l'unione delle basi dei tre autospazi $V_{-2}(f_2)$, $V_2(f_2)$ e $V_4(f_2)$. Allora $\mathcal{B}'$ è una base diagonalizzante per f_2. Inoltre $\mathcal{B}'$ è ortogonale in quanto gli autovalori di f_2 sono tutti distinti. Per ottenere da $\mathcal{B}'$ una base $\mathcal{B}''$ diagonalizzante per f_2 e ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$ basterà dividere ciascun vettore di $\mathcal{B}'$ per la sua norma. Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}'' &= \left\{ \frac{(1,-2,1)}{\|(1,-2,1)\|}, \frac{(-1,0,1)}{\|(-1,0,1)\|}, \frac{(1,0,1)}{\|(1,1,1)\|} \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4 [8 punti]. **Matrici associate.**

(a) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K di dimensione n. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di V e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V. Si definisca la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Definizione

Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi di V. Allora la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ è la matrice

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n},$$

dove gli $a_{ij} \in K$ sono tali che:

$$f(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \dots + a_{ni}w_n.$$

(b) Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si mostri che $\mathcal{B}' = \{(1, 0, -1), (0, 2, -1), (-1, 1, 0)\}$ è una base diagonalizzante per f e si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}'}(f)$.

Svolgimento

Per mostrare che $\mathcal{B}'$ è una base diagonalizzante per f basterà mostrare che i vettori $(1, 0, -1), (0, 2, -1), (-1, 1, 0)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ e che ognuno di essi è un autovettore di f. Poiché

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

i vettori $(1, 0, -1), (0, 2, -1), (-1, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^3$. Inoltre abbiamo:

- $f(1, 0, -1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$
- $f(0, 2, -1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$
- $f(-1, 1, 0) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Quindi $(1, 0, -1), (0, 2, -1), (-1, 1, 0)$ sono tre autovettori di f relativi rispettivamente agli autovalori $1, 1$, e -1. Di conseguenza la matrice $M_{\mathcal{B}'}(f)$ è la matrice diagonale

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Si scrivano le matrici $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})$ e $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$ del cambiamento di base rispettivamente dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ e si verifichi che

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) \cdot A \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3}).$$

Svolgimento

Abbiamo

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \big(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})\big)^{-1}$, abbiamo

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

dove l'inversa può essere calcolata utilizzando il metodo di Gauss–Jordan o la matrice cofattore.

Con un semplice prodotto di matrici è facile verificare che:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Si calcoli A^{101} e se ne deduca l'espressione di $f^{101}(x,y,z)$, dove $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *(Si richiama la notazione* $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\ volte}$*.)*

Svolgimento

Poniamo $B := M_{\mathcal{B}'}(f)$ e $P := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})$. Chiaramente abbiamo $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \big(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})\big)^{-1} = P^{-1}$. Possiamo quindi riscrivere la relazione

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) \cdot A \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})$$

nel modo seguente:

$$B = P^{-1}AP.$$

Allora abbiamo

$$B^{101} = \big(P^{-1}AP\big)^{101} = P^{-1}A^{101}P,$$

da cui ricaviamo

$$A^{101} = PB^{101}P^{-1}.$$

Notando che

$$B^{101} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{101} = \begin{pmatrix} 1^{101} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{101} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{101} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B,$$

otteniamo

$$A^{101} = PBP^{-1} = A.$$

Ora, poiché

$$M_{\mathcal{B}}(f^{101}) = (M_{\mathcal{B}}(f))^{101} = A^{101} = A,$$

si ha $f^{101} = f$ e quindi

$$f^{101}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x-2y-4z \\ 4x+3y+4z \\ z \end{pmatrix},$$

ossia

$$f^{101}(x,y,z) = (-3x-2y-4z, 4x+3y+4z, z).$$