Geometria e Algebra - MIS-Z

Secondo Esonero

22/06/2022

Nome e Cognome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ______________________________

Informazioni

Questo esonero contiene 4 esercizi per un totale di 35 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 35$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	**Punteggio**

TOTALE

ESERCIZIO 1 [8 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) Si consideri $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard. Esiste $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori

$$(k, 1, -1) \qquad \text{e} \qquad (k, k, -2)$$

sono ortogonali.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

(b) Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1, 2, 3) = (1, 2), \qquad f(3, 2, 1) = (3, 4), \qquad \text{e} \qquad f(4, 4, 4) = (5, 6).$$

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

(c) Sia f un endormorfismo di uno spazio vettoriale V. Se 0 è un autovalore di f allora $\ker(f) \neq \{\underline{0}\}$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

(d) Sia V uno spazio euclideo con prodotto scalare $\langle\, , \rangle$. Siano $v, w \in V$ entrambi non nulli. Se v e w sono linearmente dipendenti allora $\langle v, w\rangle \neq 0$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

ESERCIZIO 2 [9 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano π_1 passante per i punti $A(0,1,1)$, $B(2,0,-2)$ e $C(2,1,-1)$ di $\mathbb{E}^3$.

(b) Sia $h \in \mathbb{R}$. Nella famiglia di rette di $\mathbb{E}^3$ definite dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X + (h+1)Y + Z = 2h \\ hX - Z = 2 \end{cases}$$

si determini la retta r passante per il punto $(1,1,0)$.

(c) Si mostri che la retta r <u>non</u> è contenuta nel piano π_1.

(d) Si determinino i valori di k tali che il piano definito dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2ks - 2t + k \\ y = 2s + kt \\ z = 3t + 3 \end{cases} \qquad , \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

sia parallelo a π_1.

(e) Per i valori di k trovati in (d) si calcoli la distanza del piano corrispondente dal piano π_1.

ESERCIZIO 3 [10 punti]. **Una famiglia di endomorfismi di $\mathbb{R}^3$.**

Per $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo

$$f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + 2y, kx + kz, 2y + kz). \end{array}$$

(a) Si determinino i valori di k per cui f_k non è un automorfismo.

(b) Per uno dei valori di k trovati in (a) si determini una base di $\ker(f_k)$ e di $\mathrm{Im}(f_k)$.

(c) Si richiami la definizione di autovettore e di autovalore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale.

(d) Si determinino i valori di k per cui il vettore $(2, 3, 3)$ è un autovettore di f_k. Per tali valori di k si determini l'autovalore corrispondente.

(e) Per $k = 2$ si spieghi perché l'operatore f_2 è diagonalizzabile (richiamando l'enunciato dell'opportuno teorema) e si determini una base diagonalizzante per f_2 e ortornomale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 4 [8 punti]. **Matrici associate.**

(a) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K di dimensione n. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di V e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V. Si definisca la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

(b) Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si mostri che $\mathcal{B}' = \{(1,0,-1), (0,2,-1), (-1,1,0)\}$ è una base diagonalizzante per f e si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}'}(f)$.

(c) Si scrivano le matrici $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})$ e $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$ del cambiamento di base rispettivamente dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ e si verifichi che

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) \cdot A \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3}).$$

(d) Si calcoli A^{101} e se ne deduca l'espressione di $f^{101}(x, y, z)$, dove $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *(Si richiama la notazione* $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}$*.)*