

Esercizi

3 - SISTEMI LINEARI

Legenda:

😊 : Un gioco da ragazzi, dopo aver riletto gli appunti del corso

😞 : Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci

🤪 : Non ci dormirò stanotte

😊 **Esercizio 1.** Ognuna delle matrici seguenti è la matrice orlata di un sistema lineare. Per ognuna di esse si determini se il sistema corrispondente è compatibile e, in caso affermativo, si trovi l'insieme delle soluzioni. (Si noti che tutte le matrici sono a scalini.)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha + 3 \end{pmatrix}, \text{ al variare di } \alpha \in \mathbb{R}.$$


$$E = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 - 2k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^3 - 4k \end{pmatrix}, \text{ al variare di } k \in \mathbb{R}.$$

😊 **Esercizio 2.** Risolvere i seguenti sistemi lineari utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss–Jordan.

$$(a) \begin{cases} X_1 + 2X_3 + X_4 = 8 \\ 2X_1 + 3X_2 - X_3 - 2X_4 = -2 \\ -X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 3X_4 = -1 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} X_3 + 2X_4 + 4X_5 = 1 \\ 3X_1 + 2X_2 - 5X_3 + X_4 = 0 \\ -2X_2 + 4X_4 + 2X_5 = 9 \\ -3X_1 - 2X_2 + 5X_3 - X_4 - X_5 = 9 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 5 \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 5X_4 = 8 \\ 2X_3 - 2X_4 = 3 \end{cases}$$

 **Esercizio 2.** Al variare del/dei parametro/i si discuta la compatibilità del sistema. Per ogni sistema compatibile si determini il “numero” e l’insieme delle soluzioni (in funzione del/dei parametro/i).

$$(a) \begin{cases} X + Y + hZ = 0 \\ X + hY + Z = 0 \\ hX + Y + Z = 0 \end{cases}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

$$(b) \begin{cases} kX_1 + kX_2 - kX_3 = 0 \\ -X_3 + 2X_4 = -3 \\ kX_1 + kX_2 - (k+1)X_3 + (k+5)X_4 = k-3 \\ X_1 + X_2 - X_3 = k^2 + 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$(c) \begin{cases} \alpha X_1 + X_2 + 5X_3 = 2 \\ -\alpha X_1 + (\alpha+1)X_2 + (\alpha-5)X_3 - 3X_4 - X_5 = -1 \\ \alpha X_4 + X_5 = 2 \\ -2\alpha X_1 - 2X_2 + (\alpha-11)X_3 - 2X_5 = -4 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$(d) \begin{cases} bY + Z = 1 \\ X + Y + Z = a + b \\ X + (b+1)Y + (a+3)Z = 1 + a + 2b \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

 **Esercizio 3.** Sia:

$$(*) \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

un sistema lineare e sia


$$(**) \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = 0 \end{cases}$$

il corrispondente sistema omogeneo. Siano S e S_0 gli insiemi delle soluzioni rispettivamente di $(*)$ e $(**)$ e sia $(x_1, \dots, x_n) \in S$.

Si dimostri che

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) : (y_1, \dots, y_n) \in S_0\},$$

ovvero che ogni soluzione di un sistema lineare si può scrivere come la somma di una soluzione *particolare* del sistema e di una soluzione del sistema omogeneo corrispondente.

 **Esercizio 4.** Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. È possibile mostrare che ogni operazione elementare sulle righe di A corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per una matrice invertibile, ottenuta dalla matrice identità I_m effettuando su di essa l'operazione corrispondente (una tale matrice è detta *matrice elementare*).

Ad esempio, scambiare la prima e la terza riga di una matrice 3×3 corrisponde a moltiplicare a sinistra per la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ottenuta scambiando la prima e la terza riga della matrice identità I_3 . Abbiamo ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$



 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Si determinino delle matrici elementari P_1, \dots, P_r tali che

$$P_r \cdots P_1 A = B,$$

dove B è una matrice a scalini. (Una volta determinate P_1, \dots, P_r si verifichi che effettivamente il prodotto $P_r \cdots P_1 A$ è uguale a una matrice a scalini.)

 Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$ una matrice quadrata. Dimostrare che se effettuando l'algoritmo di Gauss-Jordan su A si ottiene una matrice con almeno una riga nulla, allora A non è invertibile. (*Indizio: si utilizzi il punto*  *dell'esercizio 4 del secondo foglio di esercizi...*)