Esercizi

5 - Basi e dimensione

Legenda:

😀 : *Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso*
🤔 : *Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci*
🤯 : *Non ci dormirò stanotte*

😀 **Esercizio 1.** Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U &= \langle (1,2,-1,2),(1,-2,1,0),(3,-4,2,1) \rangle, \\ W &= \langle (1,0,3,4),(0,0,3,0),(1,0,0,5) \rangle. \end{aligned}$$

(a) Determinare una base di U e una base di W e dedurne la dimensione di U e W.

(b) Determinare una base di $U+W$ e dedurne la dimensione di $U+W$.

(c) È vero che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$? In caso di risposta negativa, determinare una base di $U \cap W$ e la dimensione corrispondente.

😀 **Esercizio 2.** Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si consideri il sottospazio $U = \langle A, A^2, A^3, A^4 \rangle \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare la dimensione e una base $\mathcal{B}_U$ di U.

(b) Completare $\mathcal{B}_U$ a una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Determinare un sottospazio $W \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $U \oplus W = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

🤔 **Esercizio 3.** Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1,2,3), \qquad v_2 = (0,1,k-12), \qquad v_3 = (3,4,k).$$

(a) Si stabilisca per quali valori del parametro k i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare per quale valore di k il vettore $(10,16,4)$ ha coordinate $(1,2,3)$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_2\}$.

🤔 **Esercizio 4.** Sia $\mathbb{R}_{\leq n}[X] := \{P(X) \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq n\}$. Per convenzione poniamo $\deg(0) = -1$. Abbiamo quindi che il polinomio nullo 0 appartiene a $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$.

(a) Mostrare che $\{1, x, x^2, x^3\}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$. Dedurne la dimensione di $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$.

(b) Più in generale, determinare per ogni $n \geq 0$ una base di $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$ e dedurne la dimensione di $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$.

(c) Dimostrare che $\mathbb{R}[X]$ non possiede una base finita (cioè con un numero finito di elementi). In particolare questo mostra che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[X]$ non ha dimensione finita.

🤔 **Esercizio 5.** Consideriamo le seguenti matrici di $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tali matrici sono dette *matrici di Pauli* e sono spesso utilizzate in meccanica quantistica.

(a) Mostrare che $\{\mathrm{I}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ è una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, dove I_2 è la matrice identità.

(b) Calcolare le coordinate in tale base delle matrici

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

🤔 **Esercizio 6.** Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V e siano $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$ due basi rispettivamente di U e W

(a) Si dimostri che se $U \cap W = \{\underline{0}\}$ allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una base di $U \oplus W$.

(b) Si utilizzi la formula di Grassmann per dimostrare che se $U \cap W \neq \{\underline{0}\}$ allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ non è mai una base di $U \oplus W$.