Esercizi

6 - Rango e Determinante

Legenda:

😀 : *Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso*
🤔 : *Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci*
🤯 : *Non ci dormirò stanotte*

😀 **Esercizio 1.** Calcolare il rango dei seguenti insiemi di vettori nello spazio vettoriale corrispondente:

(a) $A = \{(1, 5, -4), (2, -3, 9), (7, 9, 6), (4, 7, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
(b) $B = \{(1, 0, -1, 3), (0, -2, 0, 2), (1, 4, 0, -1), (4, 8, -3, 4)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;
(c) $C = \{X^4 + 1, 2X^3, 2X^4 - 3X, X^3 - 4X^2\} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 4[X]}$.

🤔 **Esercizio 2.** Determinare per qual* valor* del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'insieme seguente è una base di $\mathbb{R}^4$:

$$\{(-1, k - 2, 1, 1), (0, 3, 5, 0), (1, 0, k, 2), (-1, 1, 1, k)\}.$$

🤔 **Esercizio 3.** Calcolare il rango delle seguenti matrici:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

🤔 **Esercizio 4.** Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

(a) $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $B_k = \begin{pmatrix} -1 & k^2 & 2k \\ 2 & 1 & 10 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$.

😀 **Esercizio 5.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici quadrate. Assicurarsi di saper utilizzare tutti i vari metodi visti in classe (regola di Sarrus, metodo di Laplace, algoritmo di Gauss–Jordan).

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

🤔 **Esercizio 6.** Determinare per qual* valor* di k la matrice seguente è invertibile e per tali valori determinarne l'inversa in funzione di k (per quest'ultimo punto si può ad esempio utilizzare il metodo della matrice dei cofattori – si veda la Lezione 15.)

$$A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & k \end{pmatrix}.$$

🤔 **Esercizio 7.** Siano $A, B, C \in \mathcal{M}_n(K)$ tali che $A = BC$. Si dimostri che se A è invertibile allora B e C sono entrambi invertibili.

🤔 **Esercizio 8.** Dimostrare che il determinante di una matrice triangolare superiore (o inferiore) è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale *(Suggerimento: si può procedere per induzione sull'ordine della matrice)*.

😀 **Esercizio 9.** Per ogni sistema comaptibile, si usi il metodo di Cramer per determinarne l'insieme delle soluzioni.

(a) $\begin{cases} 3X + Y - Z = 15 \\ -X + 3Y + 2Z = 6 \\ X + 7Y + 3Z = 27 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} X - Y + 3Z = 0 \\ 3X + Y - 3Z = \frac{5}{2} \\ 4X + Y + 2Z = \frac{4}{3} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2X + Y - Z = 5 \\ X + 2Z + T = 0 \\ -X + 2Y - T = 2 \\ Y - Z = 3 \end{cases}$

😀 **Esercizio 10.** Si utilizzi il teorema di Rouché–Capelli per discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità dei seguenti sistemi lineari. In caso di sistema compatibile, se ne determini l'insieme delle soluzioni.

(a) $\begin{cases} kX + Y = k \\ -kX + Y = -k \\ X + (k+4)Y = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3X + Y + kZ = k \\ (1-k)Y - 2Z = k \\ X + Y + kZ = k \end{cases}$

(c) $\begin{cases} Y + 3Z + kT = -1 \\ 2X - 4T = 4 \\ -X + Y + kZ + 5T = -k \end{cases}$

🤔 **Esercizio 11.** Due matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ si dicono *simili* se esite una matrice invertibile $P \in \mathcal{M}_n(K)$ tale che:

$$B = P^{-1}AP.$$

(a) Si dimostri che due matrici simili hanno lo stesso determinante.

(b) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ tali che

$$B = P^{-1}AP,$$

con $P \in \mathcal{M}_n(K)$ una matrice invertibile. Si calcoli B^2 e B^3 in funzione di A e P. Se ne deduca una formula per B^n, $n \geq 1$.

(c) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli $B = P^{-1}AP$.

(d) Si utilizzino i punti (b) e (c) per calcolare A^{2022}.

🤯 **Esercizio 12.** Per ogni $n \geq 2$, sia $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice le cui entrate sono gli interi $1, \ldots, n^2$ disposti consecutivamente sulle n righe. Ad esempio:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che per ogni $n \geq 2$, $\mathrm{rg}(A_n) = 2$.