Esercizi
8 - Prodotto scalare e Teorema spettrale

Legenda:

😀 : *Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso*
🤔 : *Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci*
🤯 : *Non ci dormirò stanotte*

😀 **Esercizio 1.** Dimostrare che il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

è un prodotto scalare, ovvero è bilineare, simmetrico e definito positivo.

😀 **Esercizio 2.** Siano $v, w \in \mathbb{R}^2$ e sia $\langle \, , \, \rangle$ il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^2$. Dimostrare l'*identità di Lagrange*:

$$\langle v, w \rangle^2 + (\det(v, w))^2 = \|v\|^2 \|w\|^2,$$

dove $\det(v, w)$ è il determinante della matrice 2×2 le cui colonne sono le coordinate dei vettori v e w.

😀 **Esercizio 3.** Determinare per qual* valor* del parametro reale k le coppie di vettori seguenti sono ortogonali rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:

a) $v_1 = (-2, k, k)$ e $w_1 = (1, k, 1)$ in $\mathbb{R}^3$.
b) $v_2 = (k, 1)$ e $w_2 = (k^2, -1)$ in $\mathbb{R}^2$.

😀 **Esercizio 4.** Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard. Siano $v = (1, 1, 2), w = (0, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Verificare che v e w sono ortogonali.
(b) Si determini un vettore u ortogonale a v e a w.
(c) Verificare che $\{u, v, w\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ e dedurne una base ortonormale.

😀 **Esercizio 5.** Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $\langle \, , \, \rangle$. Dimostrare le seguenti asserzioni:

a) $< v, w >= \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$;

b) $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2)$;

c) se $\|v\| = \|w\|$, allora $v+w$ e $v-w$ sono ortogonali. Interpretare questo risultato geometricamente quando $V = \mathbb{R}^2$ o $V = \mathbb{R}^3$.

🤔 **Esercizio 6.** Si consideri uno spazio euclideo V con prodotto scalare $\langle\, ,\, \rangle$. Siano $v, w \in V$. Definiamo

$$p_v(w) := \frac{\langle v, w\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

la *proiezione* di w su v.

(a) Sia $w_1 := w - p_v(w)$. Si dimostri che w_1 è ortogonale a v e che $Span\{v, w\} = Span\{v, w_1\}$ (si ricorda che $Span\{v, w\}$ denota il sottospazio generato da v e w).

(b) Sia ora $V = \mathbb{R}^4$ e $\langle\, ,\, \rangle$ il prodotto scalare standard. Siano $v = (1, 1, 1, 1)$ e $w = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ e sia $W = Span\{v, w\}$.

(b1) Si determini una base di $W^\perp$.

(b2) Si usi il punto (a) per determinare una base ortogonale di W e di $W^\perp$.

(b3) Si deduca dal punto (b2) una base ortornomale di $\mathbb{R}^4$.

😀 **Esercizio 7.** Si consideri $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard. Siano $v = (1, 3)$ e $w = (2, 1)$ in $\mathbb{R}^2$.

(a) Si calcoli l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ compreso tra v e w.

(b) Si calcoli la proiezione $p_w(v)$ di v su w.

(c) Si verifichi che il vettore $p_w(v)$ trovato nel punto (b) è collineare a w e che $v - p_w(v)$ è ortogonale a w. (Interpretare tale fatto geometricamente, rappresentando nel piano cartesiano i vettori v, w e $p_w(v)$.)

🤔 **Esercizio 8.** Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard. Determinare, se esistono, il/i valore/i di $k \in \mathbb{R}$ tali che l'angolo tra i vettori $v = (1, 0, 1)$ e $(1, 1, k)$ sia $\frac{\pi}{6}$. Per tal* valor* di k si calcoli la proiezione di w su v.

😀 **Esercizio 9.** Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Si determini una base ortonormale diagonalizzante per f (si noti che l'esistenza di tale base è garantita dal teorema spettrale poiché A è simmetrica).

🤔 **Esercizio 10.** Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si determini una base ortonormale diagonalizzante per f. *(Può risultare utile quanto dimostrato nell'esercizio 6a.)*

🤯 **Esercizio 11.** Dimostrare che i quattro segmenti che congiungono i punti medi di due lati consecutivi di un rombo formano un rettangolo.