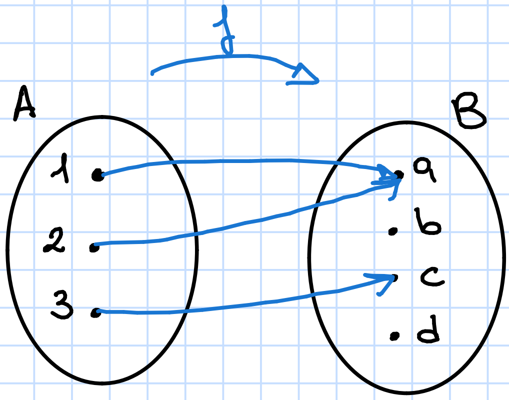
Lezione 2 - GEOMETRIA e ALGEBRA 09/03/2022

Ripartiamo dall' esempio di ieri



- $f(1) = a = f(2)$
  (due elementi distinti di A hanno la stessa immagine)
  $\Downarrow$
  f non è <u>iniettiva</u>

- $Im(f) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{a, c\} \neq B$
  (esistono elementi di B privi di controimmagine)
  $\Downarrow$
  f non è <u>suriettiva</u>

Def: Una funzione $f: A \to B$ si dice <u>iniettiva</u> se $\forall\, x, y \in A$

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

(elementi distinti di A hanno immagini distinte)

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f(y) \implies x = y$$

: usiamo questa implicazione per dimostrare che una funzione è iniettiva

(ogni elemento di B ha <u>al più</u> una controimmagine)

Def: Una funzione $f: A \to B$ si dice <u>suriettiva</u> se $Im(f) = B$, o equivalentemente se

$$\forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A \text{ t.c. } f(x) = y.$$

(ogni elemento di B ha <u>almeno</u> una controimmagine)

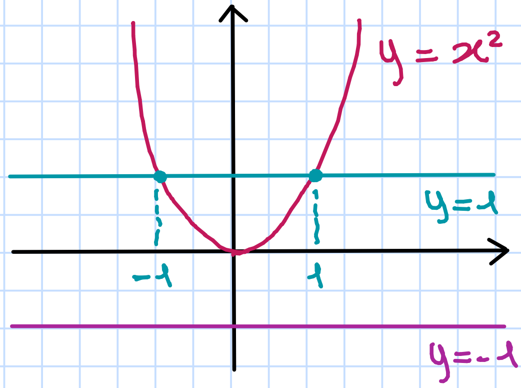
Def: Una funzione $f: A \to B$ si dice <u>biettiva</u> o <u>biunivoca</u> se f è iniettiva <u>e</u> suriettiva.

(ogni elemento di B ha <u>esattamente</u> una controimmagine)

<u>esempio</u> : $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

- INIETTIVA? No perché $f(1) = f(-1) = 1$
- SURIETTIVA? No perché $f(x) = x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^+ \Rightarrow \mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}$

geometricamente una funzione f è <u>iniettiva</u> se ogni retta $y=k$, $k \in \mathbb{R}$ interseca il grafico $y = f(x)$ in <u>al più</u> un punto



geometricamente, una funzione f è <u>suriettiva</u> se ogni retta $y=k$, $k \in \mathbb{R}$ interseca il grafico $y = f(x)$ in <u>almeno</u> un punto

NOZIONE DI CAMPO

INSIEME + OPERAZIONI che soddisfano certe proprietà = STRUTTURA ALGEBRICA

Esempi di strutture algebriche: gruppo, anello, campo, etc.

gruppo ↑ 1 operazione; anello ↑ 2 operazioni; campo ↑ 2 operazioni

<u>Def</u>: Sia X un insieme.
Un' <u>operazione binaria interna</u> su X è una funzione dal prodotto cartesiano $X \times X$ in X.

$$* : X \times X \longrightarrow X$$
$$(x,y) \longmapsto x * y$$

<u>Esempio</u> : l'addizione su $\mathbb{R}$ è un'operazione binaria interna

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x+y$$
$$(2,3) \longmapsto 5$$

operazione di addizione che conosciamo

Proprietà di $(\mathbb{R},+)$

1) COMMUTATIVITÀ: $x+y=y+x$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$
2) ASSOCIATIVITÀ: $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$
3) ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO:
   $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $x+0 = 0+x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
4) ESISTENZA DELL'OPPOSTO:
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\, x' \in \mathbb{R}$ t.c. $x+x' = x'+x = 0$ $(x'=-x)$

Anche la moltiplicazione su $\mathbb{R}$ è un'operazione binaria interna

$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x\cdot y$$

Proprietà di $(\mathbb{R},\cdot)$

5) COMMUTATIVITÀ: $x\cdot y = y\cdot x$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$
6) ASSOCIATIVITÀ $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$
7) ELEMENTO NEUTRO: $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ t.c. $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
8) ESISTENZA INVERSO: $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\exists\, x' \in \mathbb{R}$ t.c.
   $x\cdot x' = x'\cdot x = 1$ $\left(x' = x^{-1} = \frac{1}{x}\right)$

9) Infine $+$ e $\cdot$ soddisfano la PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA.
   $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

$\mathbb{R}$ dotato delle operazioni di addizione e moltiplicazione è chiamato <u>campo</u> dei numeri reali

Più in generale abbiamo (definizione di campo)

<u>Def</u>: Sia $K \neq \emptyset$ un insieme dotato di due operazioni binarie:

$$+ : K\times K \longrightarrow K$$
$$\cdot : K\times K \longrightarrow K$$

$(K,+,\cdot)$ è detto un <u>campo</u> se

1) $+$ è commutativa $(\forall\, x,y \in K,\ x+y = y+x)$
2) $+$ è associativa $(\forall\, x,y,z \in K,\ (x+y)+z = x+(y+z))$
3) esiste elemento neutro 0 rispetto a $+$ $(0+x = x+0 = x, \forall x \in K)$
4) $\forall\, x \in K$ esiste un opposto x' t.c. $x+x' = x'+x = 0$
5) $\cdot$ è commutativa $(\forall\, x,y \in K,\ x \cdot y = y \cdot x)$
6) $\cdot$ è associativa $(\forall\, x,y,z \in K,\ (x\cdot y)\cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
7) esiste elemento neutro 1 rispetto a $\cdot$ $(x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in K)$
8) $\forall\, x \in K \setminus \{0\}$ esiste un inverso x' t.c. $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$
9) $\cdot$ è distributiva rispetto a $+$ $(\forall\, x,y,z \in K\ \ x\cdot(y+z) = x\cdot y + x \cdot z)$

Esempi

1) $\mathbb{N}$ è dotato di due operazioni binarie

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad\qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(n,m) \longmapsto n+m \qquad\qquad (n,m) \longmapsto nm$$

<u>Attenzione</u>: $+$ <u>non</u> verifica 4 (esistenza opposto), poichè $\nexists\ n \in \mathbb{N}$ tale che $x+1 = 0$
$(-1 \notin \mathbb{N})$

$\Longrightarrow \mathbb{N}$ <u>non</u> è un campo

1) $\mathbb{Z}$ è dotato di due operazioni binarie

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad\qquad \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(n,m) \longmapsto n+m \qquad\qquad (n,m) \longmapsto nm$$

<u>Attenzione</u>: $\cdot$ <u>non</u> verifica 8 (esistenza inverso), poichè $\nexists\ n \in \mathbb{Z}$ tale che $2 \cdot n = 1$
$(\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z})$

$\Longrightarrow \mathbb{Z}$ <u>non</u> è un campo

3) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$: campo dei numeri razionali
$(\mathbb{R},+,\cdot)$: " " " reali
$(\mathbb{C},+,\cdot)$: " " " complessi

4) $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$: campo finito a due elementi.

$+ : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$

$(0,0) \longmapsto 0$
$(0,1) \longmapsto 1$
$(1,0) \longmapsto 1$
$(1,1) \longmapsto 0$

$\cdot : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$

$(0,0) \longmapsto 0$
$(0,1) \longmapsto 0$
$(1,0) \longmapsto 0$
$(1,1) \longmapsto 1$

0 è l'elemento neutro di $+$
1 è l'elemento neutro di $\cdot$
1 è l'opposto e l'inverso di se stesso.

È possibile verificare che $+$ e $\cdot$ verificano 1, 2, ..., 9.

Algebra lineare:

Wikipedia: "Branca della matematica che si occupa dello studio di spazi vettoriali (o spazi lineari), di trasformazioni lineari e di sistemi di equazioni lineari.

Molti problemi di matematica e fisica verificano la seguente proprietà:

Se v e w $\in X$ sono due soluzioni del problema, allora anche $v+w$ e λv, $\lambda \in \mathbb{R}$ sono soluzioni del problema. → operazioni su X

Problemi di questo tipo sono detti "lineari".

Nozione base dell'algebra lineare: SPAZIO VETTORIALE

I VETTORI sono usati in fisica per rappresentare grandezze fisiche caratterizzate da:

- una direzione
- un verso
- un'intensità

Tali grandezze sono dette vettoriali:

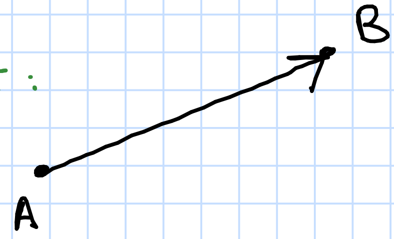
esempi: velocità, forza, accelerazione, campo elettrico, momento angolare.

[si differenziano dalle grandezze scalari che sono definite unicamente dalla loro intensità

esempi: massa, temperatura, volume, lavoro, pressione, etc.]

GEOMETRICAMENTE rappresentiamo un vettore con un "segmento orientato".

Nel piano euclideo π:



B ← punto finale

punto di applicazione o iniziale → A

Def: Un segmento orientato è una coppia ordinata di punti $(A,B) \in \pi \times \pi$.

prodotto cartesiano

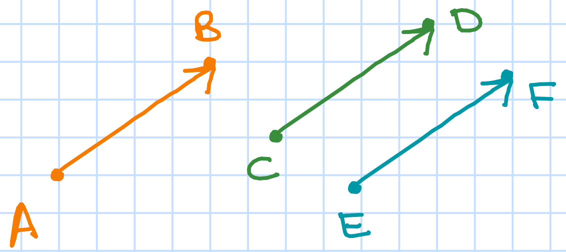
Notazione: $\overrightarrow{AB} := (A,B)$

FISICA		GEOMETRIA
direzione	$\leftrightarrow$	qualsiasi retta parallela al segmento AB
verso	$\leftrightarrow$	punto iniziale $\to$ finale
intensità	$\leftrightarrow$	lunghezza di $\overline{AB}$

Nota: $\forall\ P \in \pi$, $\overrightarrow{PP}$ corrisponde al vettore nullo (per cui non è possibile definire né una direzione né un verso)

Nel piano esistono infiniti segmenti orientati che hanno "stessa direzione, stesso verso, stessa intensità".
Diciamo che questi segmenti orientati sono "equipollenti" due a due.

esempio:



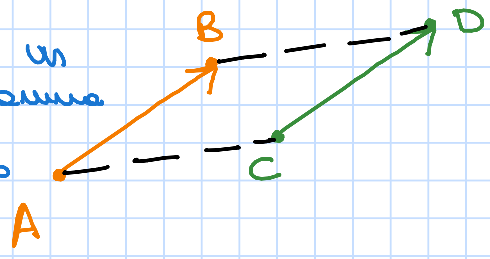
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$ sono "equipollenti" tra loro

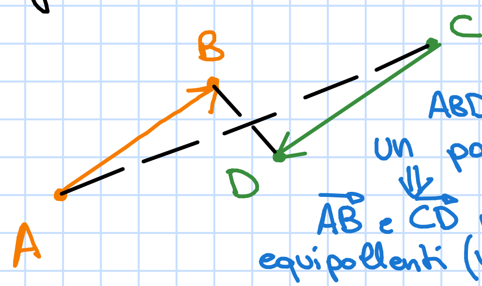
L'unica cosa che cambia è il punto di applicazione

Più formalmente:

Def: Due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si dicono equipollenti e scriviamo $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ se il quadrilatero avente vertici, ordinatamente $ABDC$ è un parallelogramma.

ABDC è un parallelogramma
$\Downarrow$
$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono equipollenti





ABDC non è un parallelog.
$\Downarrow$
$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ non sono equipollenti (verso diverso)

L' equipollenza è una <u>relazione di equivalenza</u>:

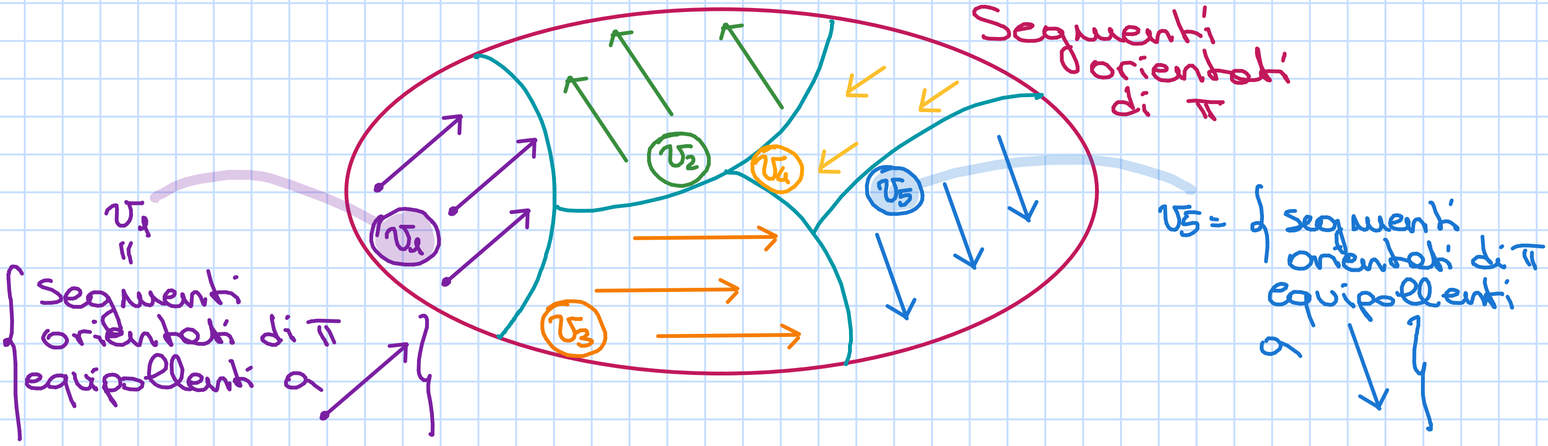
- riflessiva (ogni segmento orientato è equipollente a se stesso: $\vec{AB} \sim \vec{AB}$)
- simmetrica (se $\vec{AB} \sim \vec{CD}$ allora $\vec{CD} \sim \vec{AB}$)
- transitiva (se $\vec{AB} \sim \vec{CD}$ e $\vec{CD} \sim \vec{EF}$ allora $\vec{AB} \sim \vec{EF}$)

Per ogni segmento orientato $\vec{AB}$ posso considerare la corrispondente classe di equipollenza:

$$\text{Classe}_{\vec{AB}} = \{ \vec{CD} \ : \ \vec{AB} \sim \vec{CD} \}$$

insieme dei segmenti orientati equivalenti ad $\vec{AB}$.

Ne risulta che possiamo partizionare l'insieme dei segmenti orientati in classi di equivalenza (disgiunte)

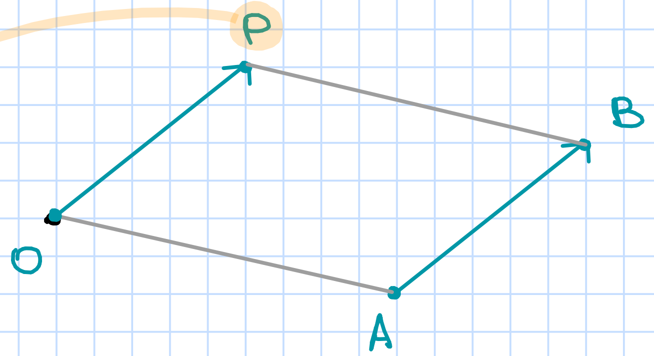


<u>Def</u>: Un <u>vettore geometrico</u> del piano π è una classe di equipollenza

Sia ora $O \in \pi$ un punto fissato. Mostriamo che per ogni vettore geometrico (= classe di equipollenza) possiamo trovare un "rappresentante" con punto di applicazione O.

Basta mostrare che per ogni segmento orientato $\vec{AB}$ esiste un punto $P \in \pi$ tale che $\vec{OP}$ è equipollente ad $\vec{AB}$

Costruisco P tale che OPBA sia un parallel.



Per transitività, $\vec{OP}$ è equipollente a tutti i segmenti orientati equipollenti a $\vec{AB}$ e posso sceglierlo come <u>rappresentante</u> della classe di equipollenza di $\vec{AB}$.

Sia $V = \{$vettori geometrici del piano$\}$

Abbiamo quindi una funzione biunivoca:

stesso punto di applicazione O

$V = \{\text{vettori geometrici del piano}\} \longleftrightarrow \{\text{segmenti orientati } \vec{OP},\ P \in \pi\}$

v (classe di equipollenza) $\longmapsto$ rappresentante di v con punto di applicazione O

classe di equipollenza di $\vec{OP}$ $\longleftarrow$ $\vec{OP}$

A partire da ora lavoreremo solo con segmenti orientati aventi lo stesso punto di applicazione: