LEZIONE 3 - GEOMETRIA e ALGEBRA

15/03/22

Nella Lezione 2 abbiamo definito un vettore geometrico (nel piano) come una classe di equipollenza di segmenti orientati (del piano) e, fissato un punto $O \in \pi$, abbiamo costruito una biezione:

$$V = \{\text{vettori geometrici del piano}\} \longleftrightarrow \{\text{segmenti orientati } \overrightarrow{OP},\ P \in \pi\}$$

Questa biezione ci permette, in particolare, di rappresentare ogni vettore con un segmento orientato $\overrightarrow{OP}$, con $P \in \pi$.

A partire da ora, con un abuso di notazione, scriveremo

$$V = \{\text{segmenti orientati } \overrightarrow{OP},\ P \in \pi\}$$

e chiameremo vettori gli elementi di V.

Notiamo che per ogni $\vec{v} \in V$, $\exists\, P \in \pi$ t.c. $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$.

Definiamo ora due operazioni su V.

OPERAZIONI SU V

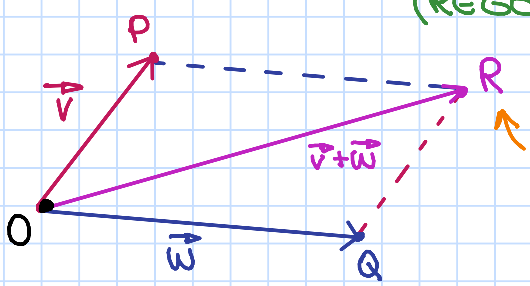
- **SOMMA DI VETTORI**

Siano $\vec{v}, \vec{w} \in V$ e siano $P, Q \in \pi$ tali che

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \overrightarrow{OQ}$$

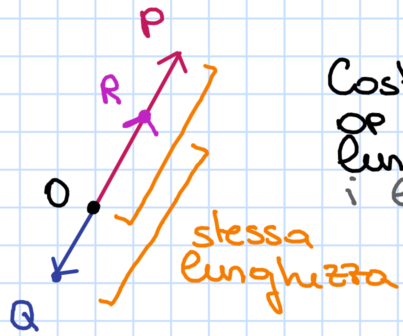
Definiamo

$\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{OR}$, tale che OPRQ è un parallelogramma (REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA)



costruisco R in modo tale che OPRQ è un parallelogramma

Nota: E se O P e Q sono collineari, cioè giacciono sulla stessa retta?



Costruisco R tale che i segmenti OP e RQ hanno la stessa lunghezza (in un parallelogramma i lati opposti sono congruenti).

Otteniamo così un' <u>operazione binaria interna</u>:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \vec{v} + \vec{w}$$

- <u>MOLTIPLICAZIONE PER SCALARI</u>

Sia $\vec{v} \in V$ e sia $P \in \pi$ tale che $\vec{v} = \vec{OP}$.
Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definiamo
$$\lambda \cdot \vec{v} = \vec{OR}$$
tale che

- O, P e R sono collineari (sulla stessa retta)
- $\overline{OR} = |\lambda|\, \overline{OP}$

lunghezza del segmento OR

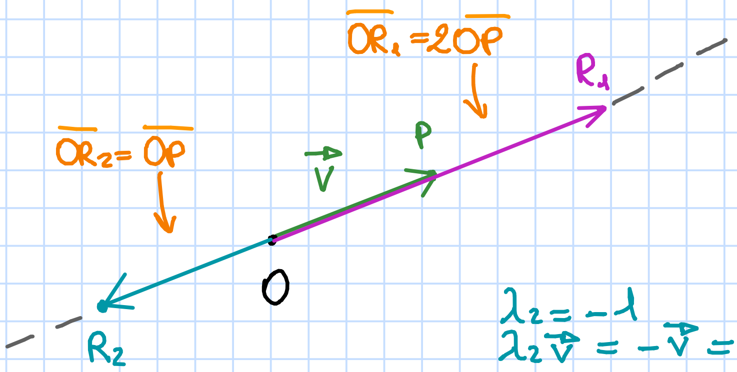
valore assoluto di λ: $|\lambda| = \begin{cases} \lambda, & \text{se } \lambda \geq 0 \\ -\lambda & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$

- $\vec{OR}$ è orientato concordemente a $\vec{OP}$, se $\lambda > 0$

  $\vec{OR}$ è orientato discordemente a $\vec{OP}$, se $\lambda < 0$

  $\vec{OR} = \vec{OO}$ se $\lambda = 0$

<u>Esempio</u>:



$\lambda_1 = 2$

$\lambda_1 \vec{v} = 2\vec{v} = \vec{OR_1}$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_2 \vec{v} = -\vec{v} = \vec{OR_2}$

Otteniamo così un' operazione binaria esterna:

$\mathbb{R} \not\subseteq V$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(\lambda, \vec{v}) \longmapsto \lambda \cdot \vec{v}$$

Siano Γ e X due insiemi.
Un'operazione binaria esterna $*$ è una funzione:

$$* : \Gamma \times X \longrightarrow X$$
$$(\gamma, x) \longmapsto \gamma * x$$

Nota che a priori non esiste nessuna relazione insiemistica tra Γ e X

Tuttavia è "complicato" lavorare con queste operazioni definite geometricamente. Vorremmo poterle tradurre "in forma algebrica".

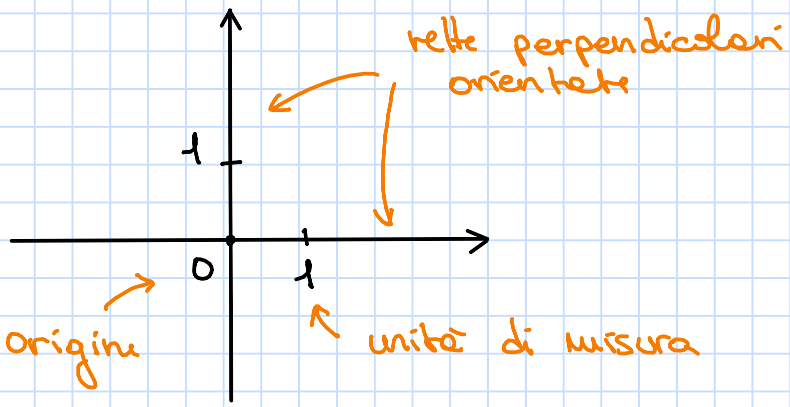
A tale scopo partiamo da qualcosa che conoscete bene: il piano cartesiano

PIANO CARTESIANO

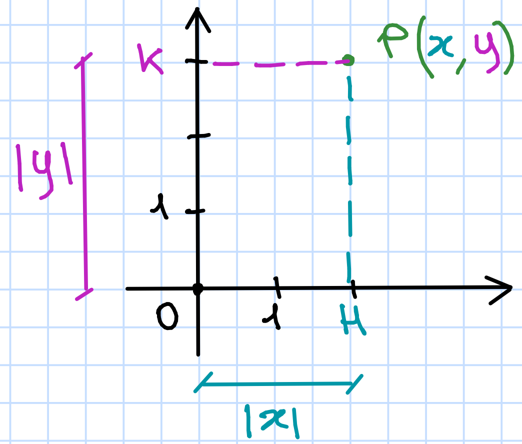
Il piano cartesiano è un sistema di riferimento basato sulle coordinate cartesiane.

A scuola vi hanno insegnato che per definirlo avete bisogno di:

- due rette perpendicolari e orientate (chiamate assi cartesiani) che si intersecano in un punto O (chiamato origine)
- un' unità di misura.



Ora ogni punto P del piano può essere identificato da due coordinate x e y (chiamate ascissa e ordinata) i cui valori assoluti sono le lunghezze delle proiezioni ortogonali OH e OK sugli assi,



Quindi, fissato un riferimento cartesiano abbiamo una biezione:

$$\{P : P \in \pi\} \xleftrightarrow{\text{biezione}} \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

ogni punto $P \in \pi$ definisce il vettore $\overrightarrow{OP}$

$\updownarrow$ biezione

$$V = \left\{ \begin{array}{c} \text{segmenti orientati} \\ \overrightarrow{OP} : P \in \pi \end{array} \right\}$$

In particolare esiste una biezione:

$$V \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

$\forall P \in \pi$, $\overrightarrow{OP} \longmapsto (x,y)$, dove x, y sono l'ascissa e l'ordinata di P

$\overrightarrow{OP} \longleftarrow (x,y)$

dove P è il punto di coordinate (x,y)

Ora vogliamo tradurre le operazioni su V in operazioni su $\mathbb{R}^2$. Più precisamente vogliamo rispondere alle domande seguenti?

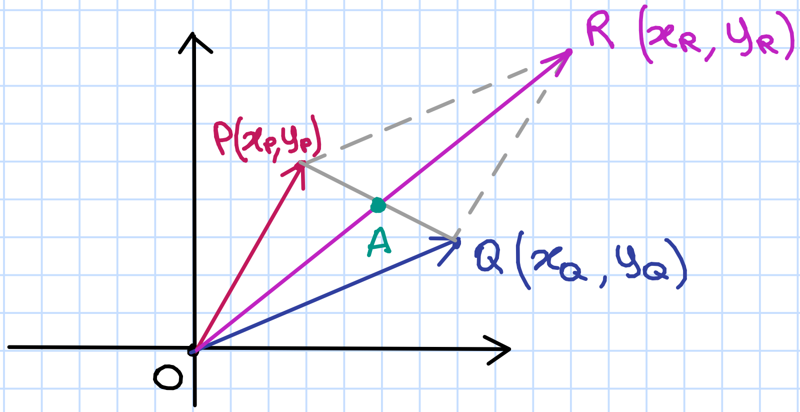
1) Siano $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OQ} \in V$: quali sono le coordinate del punto R tale che $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{OR}$?

② Siano $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, $\lambda \in \mathbb{R}$: quali sono le coordinate del punto R tale che $\lambda \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OR}$?

Rispondiamo a queste domande facendo un po' di geometria.

① $\vec{v}, \vec{w} \in V$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \overrightarrow{OP},\ P(x_P, y_P) \\ \vec{w} = \overrightarrow{OQ},\ Q(x_Q, y_Q) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{OR},\ R(x_R, y_R)$$



OPRQ è un parallelogramma

$\Downarrow$

le diagonali OR e PQ si tagliano a metà

Quindi $A(x_A, y_A)$ è al tempo stesso il punto medio di OR e di PQ:

A punto medio di OR $\Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{x_R + 0}{2} = \dfrac{x_R}{2} \\ y_A = \dfrac{y_R + 0}{2} = \dfrac{y_R}{2} \end{cases}$

A punto medio di PQ $\Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{x_P + x_Q}{2} \\ y_A = \dfrac{y_P + y_Q}{2} \end{cases}$

Ma allora

$$\frac{x_R}{2} = \frac{x_P + x_Q}{2},\quad \frac{y_R}{2} = \frac{y_P + y_Q}{2} \Longrightarrow (x_R, y_R) = (x_P + x_Q, y_P + y_Q)$$

$$\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{OP} & + & \overrightarrow{OQ} & = & \overrightarrow{OR} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ (x_P, y_P) & + & (x_Q, y_Q) & = & (x_P + x_Q, y_P + y_Q) \end{array}$$

Quindi definiamo un' operazione binaria interna "+" su $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

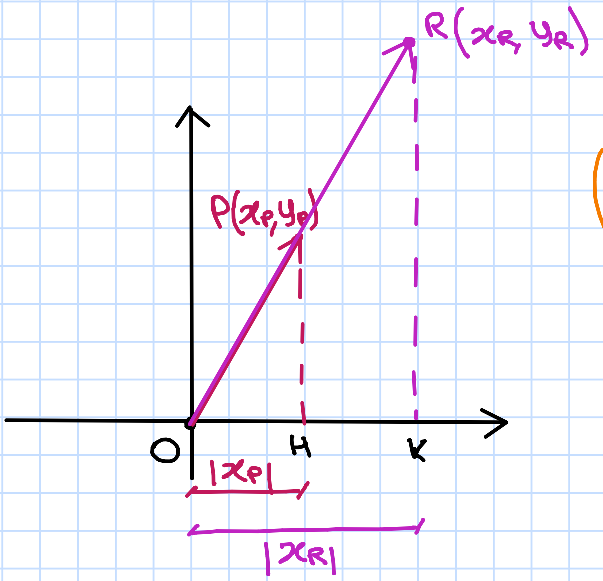
somme in $\mathbb{R}$

$$\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \longmapsto (x_1,y_1)+(x_2,y_2) := (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

esempio : $(1,3)+(-1,4) = (1+(-1),\ 3+4) = (0,7)$

② $\vec{v} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, $P(x_P, y_P)$ $\Longrightarrow$ $\lambda\vec{v} = \overrightarrow{OR}$, $R(x_R, y_R)$



(qui nell' esempio $\lambda = 2$)

Per costruzione, i triangoli $O\hat{P}H$ e $O\hat{R}K$ sono simili. Inoltre, dalla definizione dell' operazione di moltiplicazione per scalare su V, sappiamo che $\overline{OR} = |\lambda|\,\overline{OP}$.

Ne deduciamo che $|\lambda|$ è il fattore di proporzionalità.

Consideriamo ora due casi.

Se $\lambda \geq 0$, $\overrightarrow{OR}$ è concorde a $\overrightarrow{OP}$ e quindi:

$$\begin{cases} x_R = |\lambda|\,x_P = \lambda x_P \\ y_R = |\lambda|\,y_P = \lambda y_P \end{cases}$$

$\lambda \geq 0$

Se $\lambda < 0$, $\overrightarrow{OR}$ è discorde a $\overrightarrow{OP}$ e quindi:

$$\begin{cases} x_R = -|\lambda|\,x_P = \lambda x_P \\ y_R = -|\lambda|\,y_P = \lambda y_P \end{cases}$$

$\lambda < 0$

In ogni caso (per $\lambda \geq 0$ e $\lambda < 0$) abbiamo che

$$\begin{cases} x_R = \lambda x_P \\ y_R = \lambda y_P \end{cases}$$

Quindi definiamo un'operazione <u>binaria esterna</u> "$\cdot$" su $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\lambda, (x,y)) \longmapsto \lambda \cdot (x,y) := (\underset{\uparrow}{\lambda x}, \underset{\uparrow}{\lambda y})$$

moltiplicazione in $\mathbb{R}$

<u>esempio</u>: $(-4) \cdot (1, -2) = (-4 \cdot 1, -4 \cdot (-2)) = (-4, 8)$

In conclusione abbiamo definito due operazioni su $\mathbb{R}^2$ "<u>compatibili</u>" con le operazioni definite su V:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{(binaria interna)}$$

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \longmapsto (x_1,y_1) + (x_2,y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{(binaria esterna)}$$

$$(\lambda, (x,y)) \longmapsto \lambda \cdot (x,y) := (\lambda x, \lambda y)$$

Vediamo ora quali sono le proprietà di queste operazioni.

<u>Proprietà</u>

1) COMMUTATIVITÀ (conseguenza del fatto che $(\mathbb{R},+)$ è commutativo)

$\forall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_2,y_2) + (x_1,y_1)$

2) ASSOCIATIVITÀ (conseguenza del fatto che $(\mathbb{R},+)$ è associativo)

$\forall (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2,$

$$\big((x_1,y_1) + (x_2,y_2)\big) + (x_3,y_3)\big) = (x_1,y_1) + \big((x_2,y_2) + (x_3,y_3)\big)$$

3) <u>ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO</u> (conseguenza dell'esistenza dell'elemento neutro 0 in $(\mathbb{R},+)$)

$(0,0) \in \mathbb{R}^2$ è tale che $(x,y)+(0,0)=(0,0)+(x,y)=(x,y)$ $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4) <u>ESISTENZA DELL'OPPOSTO</u> (conseguenza dell'esistenza dell'opposto in $(\mathbb{R},+)$)

$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists\ (x',y') \in \mathbb{R}^2$ tale che $(x,y)+(x',y')=(x',y')+(x,y)=(0,0)$

$(x' = \underbrace{-x}$ e $y' = -y)$

opposto di x in $\mathbb{R}$ rispetto a $+$

5) <u>PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DI $\mathbb{R}^2$</u>

$\forall\ (x_1,y_1),\ (x_2,y_2) \in \mathbb{R},\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot ((x_1,y_1) + (x_2,y_2)) = \lambda \cdot (x_1,y_1) + \lambda \cdot (x_2,y_2)$$

somma in $\mathbb{R}^2$

6) <u>PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DI $\mathbb{R}$</u>

$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda + \mu) \cdot (x,y) = \lambda \cdot (x,y) + \mu \cdot (x,y)$$

somma in $\mathbb{R}$

7) $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{R},\quad \lambda\mu \cdot (x,y) = \lambda \cdot (\mu \cdot (x,y))$

8) $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad 1 \cdot (x,y) = (x,y)$ ($1 \in \mathbb{R}$ è elemento neutro della moltiplicazione per scalari)

elemento neutro di $\mathbb{R}$ rispetto alla moltiplicazione

$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ è il nostro primo esempio di "spazio vettoriale" su $\mathbb{R}$.

Più in generale uno spazio vettoriale (o spazio lineare) è una struttura algebrica composta da:

- un campo K, i cui elementi sono detti <u>scalari</u> (nel nostro esempio $K=\mathbb{R}$)
- un <u>insieme</u> V, i cui elementi sono detti <u>vettori</u>
- <u>due operazioni binarie</u> caratterizzate da determinate proprietà

$(K, +, \cdot)$

Def: Sia K un campo. Uno spazio vettoriale su K è un insieme V dotato di due operazioni:

$$+ : V \times V \to V$$

$$\cdot : K \times V \to V$$

che verificano le seguenti proprietà:

per differenziare da 0, elemento neutro di $(K,+)$

1) COMMUTATIVITÀ: $\forall\, v, w \in V$, $v + w = w + v$
2) ASSOCIATIVITÀ: $\forall\, u, v, w \in V$, $u + (v + w) = (u + v) + w$.
3) ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO: $\exists\, \underline{0} \in V$ t.c. $\underline{0} + v = v + \underline{0} = v$, $\forall v \in V$
4) ESISTENZA DELL'OPPOSTO: $\forall\, v \in V$, $\exists\, v' \in V$ t.c. $v + v' = v' + v = \underline{0}$.
5) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DI VETTORI
   $\forall\, v, w \in V$, $\forall\, \lambda \in K$, $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
6) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DI SCALARI
   $\forall\, v \in V$, $\forall\, \lambda, \mu \in K$, $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
7) $\forall\, v \in V$, $\forall\, \lambda, \mu \in K$, $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$.
8) $1 \cdot v = v$, $\forall\, v \in V$ (dove 1 è l'elemento neutro di $(K, \cdot)$)

Chiamiamo vettori gli elementi di V e scalari gli elementi di K.

$K = \mathbb{R} \to$ spazio vettoriale reale
$K = \mathbb{C} \to$ spazio vettoriale complesso.

N.B.: Nella definizione di spazio vettoriale, per non appesantire la notazione, usiamo lo stesso simbolo "+" per la somma in V e in K.
Tuttavia il contesto ci permetterà di distinguere le due operazioni e non ci sarà confusione.

Osservazioni: Sia V un K-spazio vettoriale

1) In V esiste un unico vettore nullo che denotiamo $\underline{0}$.

Dim: Supponiamo che esistono due vettori nulli $\underline{0}_1$ e $\underline{0}_2$. Allora, per definizione, abbiamo:

$$\underline{0_1} \underset{\substack{\uparrow\\ \underline{0_2}\text{ è un elemento neutro di } V}}{=} \underline{0_1} + \underline{0_2} \underset{\substack{\uparrow\\ \underline{0_1}\text{ è un elemento neutro di } V}}{=} \underline{0_2} \implies \underline{0_1} = \underline{0_2}.$$

2) $\forall\ v \in V$ esiste un unico opposto che denotiamo $-v$

Dim: Siano v_1 e v_2 due opposti di v. Allora per definizione abbiamo:

$$v_1 \underset{\substack{\uparrow\\ \underline{0}\text{ è il vettore nullo}}}{=} v_1 + \underline{0} \underset{\substack{\uparrow\\ v_2 \text{ è l'opposto di } v}}{=} v_1 + (v + v_2) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{proprietà associativa}}}{=} (v_1 + v) + v_2 \underset{\substack{\uparrow\\ v_1 \text{ è l'opposto di } v}}{=} \underline{0} + v_2 = v_2$$

3) $\forall\ v \in V$ si ha $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{elemento neutro di } (K,+)}}{0} \cdot v = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{elemento neutro di } V}}{\underline{0}}$

Dim:

$$0\cdot v \underset{\substack{\uparrow\\ 0 \text{ elemento neutro di } (K,+)}}{=} (0+0)\cdot v \underset{\substack{\uparrow\\ \text{proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari}}}{=} 0\cdot v + 0\cdot v \implies$$

$$\implies \underbrace{0\cdot v + (-0\cdot v)}_{=\ \underline{0}} = \underbrace{0\cdot v + 0\cdot v + (-0\cdot v)}_{=\ 0\cdot v + \underline{0}\ =\ 0\cdot v} \implies 0\cdot v = \underline{0}$$

$-0\cdot v$ è il vettore opposto di $0\cdot v$

4) $\forall\ \lambda \in K,\quad \lambda\cdot\underline{0} = \underline{0}$

Dim

$$\lambda\cdot\underline{0} = \lambda\cdot(\underline{0}+\underline{0}) = \lambda\cdot\underline{0} + \lambda\underline{0}$$

In maniera analoga a 3 concludiamo che $\lambda\cdot\underline{0} = \underline{0}$

5) Siano $\lambda \in K$, $v \in V$ tali che $\lambda\cdot v = \underline{0}$, allora $\lambda = 0$ o $\underline{v} = 0$.

Dim per esercizio.