LEZIONE 6 - GEOMETRIA e ALGEBRA 23/03/22

Nella Lezione 5 abbiamo introdotto il prodotto di matrici, cioè una funzione:

$$\mathcal{M}_{m,n}(K) \times \mathcal{M}_{n,p}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,p}(K)$$
$$(A,B) \longmapsto C = AB$$

definita nel modo seguente:
Se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ allora $C = AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$, dove

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

esempio:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{2\times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}}_{4\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} -14 & -26 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

Proprietà

1) Il prodotto di matrici non è commutativo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (11) \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Def: Diciamo che due matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ commutano se $AB = BA$.

affinché $AB=BA$ entrambi i prodotti devono essere definiti e avere la stessa taglia. Quindi l'unica possibilità è che A,B siano quadrate dello stesso ordine.

esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

poiché $AB = BA$ diciamo che A e B commutano.

2) è <u>associativo</u>:

$\forall\, A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\forall\, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $\forall\, C \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$

$$\underset{m\times n}{(A}\underset{n\times p}{B)}\underset{p\times q}{C} = A(BC).$$

3) è <u>distributivo</u> rispetto a +:

$\forall\, A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\forall\, C, D \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$:

$$(A+B)C = AC + BC$$
$$A(C+D) = AC + AD$$

4) $\forall\, \lambda \in K$, $\forall\, A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\forall\, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

5) <u>Elemento neutro rispetto al prodotto</u>

Poiché il prodotto non è commutativo, dobbiamo distinguere tra elemento neutro a sinistra e a destra.

Partiamo da un esempio:

Consideriamo $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Una matrice I_s è un elemento neutro <u>a sinistra</u> per $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto se

$$I_s A = A, \quad \forall\, A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Sia $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \implies A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Innanzitutto, se $\underset{2\times 2}{I_s}\,\underset{2\times 3}{A} = \underset{2\times 3}{A} \implies I_s \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Cerchiamo dunque $I_s = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che:

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} a'a + b'd = a \\ a'b + b'e = b \\ a'c + a'f = c \\ c'a + d'd = d \\ c'b + d'e = e \\ c'c + c'f = f \end{cases}$$

Si vede facilmente che $(a', b', c', d') = (1, 0, 0, 1)$ è una soluzione del sistema.

In altre parole $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un elemento neutro sinistro per $\mathcal{M}_{2,3}(K)$ rispetto al prodotto.

In modo simile si mostra che $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ è un elemento neutro destro per $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto.

Più in generale definiamo:

<u>Def</u>: $\forall\ n \geq 1$, la matrice <u>identità</u> o <u>unità</u> di ordine n è

$$I_n = (\delta_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$$

dove

dove 1 è l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione di K.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

delta di Kronecker

<u>esempio</u>: $I_1 = (1)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Per $n \geq 1$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

cioè la matrice quadrata di ordine n che ha zeri ovunque tranne sulla diagonale dove ha tutti 1.

Si può facilmente mostrare che $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ si ha

$$I_m A = A \quad \text{e} \quad A I_n = A$$

si può dimostrare che è unico

cioè I_m (risp. I_n) è ~~un~~ l'elemento neutro sinistro (risp. destro) per $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ rispetto al prodotto.

In particolare I_n è l'elemento neutro (sinistro e destro) per $\mathcal{M}_n(K)$, cioè:

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_n(K),\ I_n A = A I_n = A.$$

NB: $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ abbiamo il prodotto notevole:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tale identità è una conseguenza della commutatività del prodotto in $\mathbb{R}$, e non è più vera nel contesto delle matrici.

Infatti, $\forall\, A, B \in M_n(K)$

$$(A+B)^2 := (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B = A^2 + \underbrace{BA + AB}_{} + B^2.$$

e non possiamo semplificare ulteriormente. BA ≠ AB (in genere)

Ma se A e B commutano allora otteniamo di nuovo il prodotto notevole:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

AB = BA

Lavoriamo ora in $M_n(K)$. In tal caso abbiamo un'operazione di prodotto binaria interna:

$$M_n(K) \times M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$$
$$(A,B) \longmapsto AB$$

il cui elemento neutro (sinistro e destro) è dato dalla matrice I_n.

Una matrice $A \in M_n(K)$ per cui esiste un inverso rispetto al prodotto è detta invertibile. Più precisamente:

Def: $A \in M_n(K)$ si dice *invertibile* se esiste $B \in M_n(K)$ tale che

$$AB = I_n = BA.$$

Osservazione: • Se B esiste allora è unica.

Dim: Siano B, C tali che
- $AB = I_n = BA$
- $AC = I_n = CA$

allora: $C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B$

associatività; $AB = I_n$; $CA = I_n$

$\Rightarrow C = B.$

Chiamiamo dunque B l'inversa di A e la denotiamo A^{-1}.

- Per mostrare che $B = A^{-1}$ basta verificare una delle due identità:

$$AB = I_n \quad \text{o} \quad BA = I_n$$

L'altra sarà automaticamente verificata (purtroppo non abbiamo abbastanza strumenti per dimostrare questo fatto a questo punto del corso).

Esempi

1) I_n è invertibile $\forall\, n \geq 1$.

Infatti $I_n \cdot I_n = I_n \implies (I_n)^{-1} = I_n$

2) O_n (la matrice quadrata con tutti zero) <u>non</u> è invertibile.

Infatti $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ abbiamo $AO_n = O_n \; (\neq I_n)$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è invertibile?

Vediamo se esiste una matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{BA = I_2} \xRightarrow{\text{otteniamo un sistema}} \begin{cases} a+b=1 \\ a+b=0 \\ c+d=0 \\ c+d=1 \end{cases}$$

impossibile!

Dunque $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ <u>non</u> è invertibile.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è invertibile?

Cerchiamo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a+3b=1 \\ 2a+4b=0 \\ c+3d=0 \\ 2c+4d=1 \end{cases} \implies \begin{cases} b=1 \\ a=-2b \\ c=-3d \\ -2d=1 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} b=1 \\ a=-2 \\ c=3/2 \\ d=-\frac{1}{2} \end{cases} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si può verificare facilmente che A^{-1} verifica anche $AA^{-1} = I_2$ (noi abbiamo mostrato che $A^{-1}A = I_2$)

Proposizione: Siano $A, B \in M_n(K)$ invertibili, con inverse rispettivamente A^{-1} e B^{-1}. Allora anche AB è invertibile e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Dim

Abbiamo:

$$AB(B^{-1}A^{-1}) \underset{\text{associatività}}{=} A(BB^{-1})A^{-1} \overset{B^{-1} \text{ è l'inversa di } B}{=} A\, I_n\, A^{-1} \underset{A I_n = A}{=} A A^{-1} \underset{A^{-1} \text{ è l'inversa di } A}{=} I_n$$

Quindi $AB(B^{-1}A^{-1}) = I_n \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ancora un po' di terminologia.

Def: Sia

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

La **trasposta** di A è la matrice

qui sto dicendo che nel posto (i,j) metto l'elemento a_{ji} di A.

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

a volte in letteratura si trova anche: A^t, ${}^tA$ o ${}^TA$. Noi metteremo la "T" in alto a destra della matrice corrispondente.

Si noti che la i-esima colonna di A^T è la i-esima riga di A.

esempio:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Si noti che l'operazione di trasposizione lascia fissi gli elementi sulla diagonale di una matrice quadrata

Def: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si dice **SIMMETRICA** se

$$A^T = A, \quad \text{cioè} \quad a_{ij} = a_{ji}, \ \forall \ 1 \leq i,j \leq n.$$

Si dice invece **ANTISIMMETRICA** se

$$A^T = -A, \quad \text{cioè} \quad a_{ij} = -a_{ji}, \ \forall \ 1 \leq i,j \leq n.$$

esempio:

a_{12} a_{21} a_{24}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{è simmetrica}$$

a_{42}

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è antisimmetrica}$$

non è un caso che tutti gli elementi sulla diagonale di B sono uguali a zero

Osservazione: Se $A = (a_{ij})$ è antisimmetrica, allora $\forall i$:

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$$

Def: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si dice **ORTOGONALE** se

$$(A^T)A = I_n = A(A^T)$$

ovvero se $A^{-1} = A^T$.

esercizio: Mostrare che $\forall \, \theta \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

è ortogonale.

Vogliamo inoltre dare nomi specifici alle seguenti tipologie di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

↑ triangolare inferiore ↑ triangolare superiore ↑ diagonale ↑ scalare

Def: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si dice:

- TRIANGOLARE INFERIORE (risp. SUPERIORE) se $a_{ij} = 0$ per $j > i$ (risp. se $a_{ij} = 0$ per $j < i$)

- DIAGONALE se A è sia triangolare inferiore che triangolare superiore, ossia se

- SCALARE se A è diagonale e tutti gli elementi della diagonale sono uguali. In tal caso $\exists\, \lambda \in K$ tale che
$$A = \lambda I_n.$$

esempio: La matrice nulla $O_n \in \mathcal{M}_n(K)$ è triang. inf., triang. sup., diagonale e scalare.