

Ultime considerazioni sui sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare

$$(*) \quad AX = b$$

con  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  invertibile.

Allora, per definizione,  $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$  tale che  $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ .  
Quindi abbiamo:

$$\underbrace{A^{-1}} \underbrace{AX} = \underbrace{A^{-1}} b \Rightarrow \underbrace{I_n} X = A^{-1}b \Rightarrow X = A^{-1}b.$$

(questo ci dice che se  $X$  è soluzione di  $(*)$  allora  $X = A^{-1}b$ ).

Viceversa si verifica facilmente che  $X = A^{-1}b$  è soluzione di  $(*)$ :  $\underbrace{A}_{X} A^{-1}b = I_n b = b$ .

Otteniamo dunque che il sistema  $(*)$  possiede un'unica soluzione data da:

$$X = A^{-1}b.$$

Proposizione (METODO DELL'INVERSA)

Sia  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  una matrice invertibile e  $b \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ . Allora il sistema lineare

$$AX = b$$

possiede l'unica soluzione  $X = A^{-1}b$ .

Esempio: L'unica soluzione del sistema lineare:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_b$$

è

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

esercizio 4  
foglio 2

Come calcolare l'inversa di una matrice?

Purtroppo daremo solo un accenno in questo corso, ma è utile sapere che l'algoritmo di Gauss-Jordan può essere utilizzato per calcolare in modo efficiente l'inversa di una matrice.

Idea: Se esiste una successione di operazioni elementari che "trasformano"  $A$  nella matrice identità, allora  $A$  è invertibile.

Più precisamente, se  $P_1, \dots, P_r$  sono le matrici elementari corrispondenti alle operazioni di cui sopra (come spiegato nell'ultimo esercizio del foglio 3), allora si ha:

$$P_r \dots P_1 A = I_n$$

Quindi  $A^{-1} = P_r \dots P_1$ . Di conseguenza  $A^{-1}$  può essere calcolata effettuando le stesse operazioni su  $I_n$ :

$$P_r \dots P_1 \left( A \mid I_n \right) = \left( I_n \mid \underbrace{P_r \dots P_1}_{\substack{\text{è l'inversa di} \\ A \text{ appare qui}}} \right)$$

Esempio: Riprendiamo la matrice precedente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per determinare l'inversa di  $A$  affianchiamo ad  $A$  la matrice identità ed effettuiamo operazioni sulla matrice  $3 \times 6$  così ottenuta finché non otteniamo nel primo blocco la matrice identità:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{operazioni elementari}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} A^{-1} \\ \uparrow \\ I_3 \end{array}$$

in questo blocco otteniamo l'inversa di  $A$

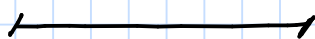
$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c}
 \downarrow R_2 \leftrightarrow R_3 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right) \\
 \downarrow R_2 \leftarrow R_2 - R_3 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right) \\
 \downarrow R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3 \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\
 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right) \\
 \downarrow \begin{array}{l} R_1 \leftarrow -1 \cdot R_1 \\ R_2 \leftarrow \frac{1}{3} R_2 \end{array} \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\
 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right) \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}}
 \end{array}$$

Ritroviamo dunque (fortunatamente!) che  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .



Prima di lasciare i sistemi lineari per un po', consideriamo un sistema lineare omogeneo a coefficienti in  $K$ :

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

non dimentichiamo che  $K^n$  ha una struttura di spazio vettoriale

Chiamiamo  $S_0$  l'insieme delle soluzioni di (\*). Notiamo che  $S_0$  è un sottoinsieme di  $K^n$  con qualche interessante proprietà:

- 1)  $(0, \dots, 0) \in S_0$  (il vettore nullo è sempre soluzione di un sistema omogeneo)
- 2) se  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in S_0 \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \in S_0$   
(La somma di due soluzioni di un sistema omogeneo è ancora una soluzione del sistema)

### Dim

Se  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in S_0$ , allora abbiamo

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \quad \text{e} \quad a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n \stackrel{\textcircled{2}}{=} 0, \quad \forall i=1, \dots, m.$$

Mostriamo che anche  $(x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in S_0$ , cioè è soluzione di  $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0, \forall i$ . Abbiamo:

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{in}(x_n + y_n) = \underbrace{a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n}_{\substack{|| \textcircled{1} \\ 0}} + \underbrace{a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n}_{\substack{|| \textcircled{2} \\ 0}} = 0. \quad \square$$

3) Se  $(x_1, \dots, x_n) \in S_0 \Rightarrow \lambda(x_1, \dots, x_n) \in S_0, \forall \lambda \in K$ .

### Dim

Se  $(x_1, \dots, x_n) \in S_0 \Rightarrow a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0, \forall i=1, \dots, m$ :

Mostriamo che anche  $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in S_0$ .  
Per ogni  $i=1, \dots, m$  abbiamo:

$$a_{i1}(\lambda x_1) + \dots + a_{in}(\lambda x_n) = \lambda a_{i1}x_1 + \dots + \lambda a_{in}x_n = \lambda \underbrace{(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)}_{\substack{|| \\ 0}} = 0 \quad \square$$

Le proprietà 1, 2 e 3 fanno di  $S_0$  un "sottospazio vettoriale" di  $K^n$ .

Più in generale, per uno spazio vettoriale  $V$  su  $K$  definiamo:

Def: Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$ .

Un sottoinsieme  $W$  di  $V$  si dice **SOTTOSPAZIO VETTORIALE** se:

1)  $W \neq \emptyset$ .

2)  $\forall w_1, w_2 \in W, w_1 + w_2 \in W$  ( $W$  è chiuso rispetto alla somma)

3)  $\forall w \in W, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot w \in W$  ( $W$  è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari)

Osservazioni:  
• Si noti che la proprietà 3 implica che  $0 \in W$ . Infatti, sia  $w \in W$  ( $w$  esiste poiché  $W \neq \emptyset$ ). Allora per  $\lambda=0$  abbiamo  $0 \cdot w = 0 \in W$ .

- Un sottospazio vettoriale è uno spazio vettoriale:
  - l'elemento neutro  $0$  appartiene a  $W$  per l'osservazione precedente
  - $\forall w \in W, -w = (-1) \cdot w \in W$  per la proprietà 3 ( $\lambda=-1$ ).
  - Tutte le altre proprietà discendono da  $V$  in quanto gli elementi di  $W$  sono anche elementi di  $V$  ( $W \subseteq V$ ) e  $V$  è uno spazio vettoriale.

## Esempi

1) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo a  $n$  incognite e coefficienti in  $K$  è un sottospazio vettoriale di  $K^n$ .

2) Sia  $V = K^n$  e  $W := \{ (0, x_2, \dots, x_n) : x_i \in K \forall i=2, \dots, n \}$ .  
 $W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ . Infatti:

①  $(0, \dots, 0) \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$ .

② siano  $\underline{x} = (0, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\underline{y} = (0, y_2, \dots, y_n) \in W$ .

Allora  $\underline{x} + \underline{y} = (0, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in W$

↑  
prima coordinata  
nulla

③ Siano  $\underline{x} = (0, x_2, \dots, x_n) \in W$ ,  $\lambda \in K$ .

Allora  $\lambda \underline{x} = (0, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in W$

Avremmo potuto concludere che  $W$  è un sottospazio vettoriale anche osservando che  $W$  rappresenta l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \end{cases}$$

3)  $V = \mathbb{R}^3$

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \}$$

vettore nullo  
di  $\mathbb{R}^3$

$W$  non è un sottospazio vettoriale poiché  $(0, 0, 0) \notin W$ .

4) Ogni spazio vettoriale  $V$  ha due sottospazi vettoriali "banali":

$$W_1 = \{ \underline{0} \}, \text{ dove } \underline{0} \text{ è il vettore nullo di } V.$$

$$W_2 = V.$$

5) Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  e sia  $v \in V$ ,  $v \neq \underline{0}$ , un vettore non nullo.

L'insieme

$$\langle v \rangle = \{ \lambda v, \lambda \in K \}$$

Usiamo  
la  
definizione  
di spazio  
vettoriale

è un sottospazio vettoriale costituito da tutti i multipli di  $v$ .

Infatti:

1)  $\underline{0} = 0 \cdot v \in \langle v \rangle \Rightarrow \langle v \rangle \neq \emptyset$ .

2) Siano  $\underline{x}, \underline{y} \in \langle v \rangle$  e siano  $\lambda, \mu \in K$  tali che  $\underline{x} = \lambda v$ ,  $\underline{y} = \mu v$ .

Allora  $\underline{x} + \underline{y} = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu) v \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} \in \langle v \rangle$

↑  
proprietà spazio vettoriale  
∈ K

3) Sia  $\underline{x} \in \langle v \rangle$  e sia  $\lambda \in K$  tale che  $\underline{x} = \lambda v$ .

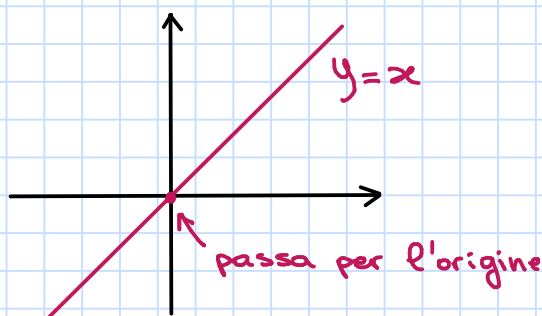
Allora,  $\forall a \in K$ ,  $a\underline{x} = a\lambda v \in \langle v \rangle$ .

Tale sottospazio prende il nome di **retta vettoriale**. Il nome è giustificato dalla seguente interpretazione geometrica:

Sia  $V = \mathbb{R}^2$  e  $v = (1, 1)$ .

Allora  $\langle v \rangle = \{ \lambda(1, 1) : \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ (x, x) : x \in \mathbb{R} \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \}$ .

Quindi  $\langle v \rangle$  corrisponde alla retta di equazione  $y = x$ :



Più in generale se  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  allora  $\langle v \rangle$  è la retta passante per l'origine definita dall'equazione:

$$bx - ay = 0.$$

Osservazioni: Si noti quindi che l'insieme dei punti di una retta del piano che non passa per l'origine non è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$  (poiché non contiene il vettore nullo  $(0,0)$ ). Parleremo in questo caso di "retta affine" invece che retta vettoriale.