LEZIONE 11 - GEOMETRIA e ALGEBRA

08/04/22

Consideriamo il problema seguente:

<u>Problema</u>: Vogliamo "costruire" un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ che contiene i vettori:

$$v_1 = (1,1,2) \quad e \quad v_2 = (3,0,1).$$

Ovviamente $\mathbb{R}^3$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che contiene v_1 e v_2.

Ne esiste uno più "piccolo", cioè un sottospazio $W \subsetneq \mathbb{R}^3$ tale che $v_1, v_2 \in W$?

Per definizione di sottospazio, se $W \subseteq \mathbb{R}^3$ è un sottospazio che contiene v_1 e v_2, allora $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda v_1 + \mu v_2$ appartiene a W.

Definiamo quindi:

$$\underbrace{< v_1, v_2 >}_{\text{"sottospazio generato" da } v_1 \text{ e } v_2} := \{ \overbrace{\lambda v_1 + \mu v_2}^{\text{"combinazione lineare" di } v_1 \text{ e } v_2} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ \lambda(1,1,2) + \mu(3,0,1) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ (\lambda + 3\mu, \lambda, 2\lambda + \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

<u>Esercizio</u>: verificare che $\{ (\lambda + 3\mu, \lambda, 2\lambda + \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Questo esempio ci permette di introdurre due importanti nozioni dell'algebra lineare:

- → la nozione di COMBINAZIONE LINEARE.
- → la nozione di SOTTOSPAZIO GENERATO.

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Una COMBINAZIONE LINEARE di $v_1, \dots, v_n$ è un vettore della forma

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ (questi ultimi sono detti coefficienti della combinazione lineare).

La combinazione lineare si dice BANALE o TRIVIALE se $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Altrimenti se $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\lambda_i \neq 0$, si dice non banale.

Se per $v \in V$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

allora diciamo che v è <u>combinazione lineare</u> di $v_1, \dots, v_n$.

<u>Esempi</u>

1) $V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$

$v = (-1,4,-3)$ è combinazione lineare di v_1 e v_2. Infatti:

$$v = \underbrace{2}_{\text{coefficienti della combinazione lineare}} v_1 + \underbrace{(-3)}_{} v_2 \quad (= 2v_1 - 3v_2)$$

2) $V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (3,2,1)$, $v_3 = (-1,6,13) \in \mathbb{R}^3$.

<u>Domanda 1</u>: $\underline{0} = (0,0,0)$ è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3?

Sì! La combinazione lineare banale restituisce <u>sempre</u> il vettore nullo:

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = \underline{0}.$$

<u>Domanda 2</u>: Esiste una combinazione lineare <u>non banale</u> di v_1, v_2, v_3 che restituisce il vettore nullo?

Per rispondere, dobbiamo determinare se esistono $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$, $(\lambda, \mu, \delta) \neq (0,0,0)$ tali che:

$$\lambda v_1 + \mu v_2 + \delta v_3 = \underline{0}$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda(1,2,3) + \mu(3,2,1) + \delta(-1,6,13) = (0,0,0).$$
$$\Downarrow$$
$$(\lambda + 3\mu - \delta, 2\lambda + 2\mu + 6\delta, 3\lambda + \mu + 13\delta) = (0,0,0)$$

Risolviamo dunque il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu - \delta = 0 \\ 2\lambda + 2\mu + 6\delta = 0 \\ 3\lambda + \mu + 13\delta = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 13 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 13 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{a scalini}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu - \delta = 0 \\ -4\mu + 8\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3\mu + \delta = -6\delta + \delta = -5\delta \\ \mu = 2\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{(-5\delta, 2\delta, \delta) : \delta \in \mathbb{R}\}$$

Per ogni $\delta \neq 0$ otteniamo i coefficienti di una combinazione lineare <u>non banale</u> che restituisce il vettore nullo.
Ad esempio per $\delta = 1$:

$$\delta = 1 \Rightarrow (\lambda, \mu, \delta) = (-5, 2, 1)^{\neq (0,0,0)} \text{ è tale che } \lambda v_1 + \mu v_2 + \delta v_3 = \underline{0}$$

$$[-5(1,2,3) + 2(3,2,1) + (-1,6,13) = (0,0,0)]$$

Dunque una combinazione lineare banale dà sempre il vettore nullo. Tuttavia una combinazione lineare può essere non banale e essere uguale al vettore nullo.

<u>Osservazioni</u>

- L'insieme delle combinazioni lineari di $v \in V$ è la retta vettoriale
$$\langle v \rangle = \{\lambda v : \lambda \in K\}.$$

- $\forall\, i = 1, \dots, n,\quad v_i$ è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$:
$$v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + \underset{\uparrow\, 1}{v_i} + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n.$$

- Dalla definizione di sottospazio vettoriale segue che se $v_1, \dots, v_n \in W$, allora ogni combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ appartiene a W.
L'insieme
$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_i \in K, \forall\, i = 1, \dots, n\}$$
è un sottospazio vettoriale di V chiamato il SOTTOSPAZIO GENERATO (o SPAN, o COPERTURA LINEARE) da $v_1, \dots, v_n$.
È il più "piccolo" sottospazio vettoriale di V che contiene $v_1, \dots, v_n$, nel senso seguente:

se esiste un sottospazio vettoriale W tale che $v_1, ..., v_n \in W$ allora $<v_1, ..., v_n> \subseteq W$.

Esempio

$V = M_2(\mathbb{R})$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$<v_1, v_2> = <\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}> = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notiamo che $<v_1, v_2> \subsetneq M_2(\mathbb{R})$ poiché ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \notin <v_1, v_2>$.

Osservazione

$\forall\ m \leq n$

$$<v_1, ..., v_m> \subseteq <v_1, ..., v_n>$$

una combinazione lineare di $v_1, ..., v_m$ è anche una combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \lambda_1 + \dots + \lambda_m v_m + 0 v_{m+1} + \dots + 0 v_n$$

Per introdurre le prossime definizioni, partiamo dall'esercizio 1 del foglio 2:

$V = \mathbb{R}^2$, $v = (1,2)$, $w = (3,4) \in \mathbb{R}^2$.

Nell'esercizio avete mostrato che:

- $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $(a,b) = \lambda v + \mu w$.

Oggi diremmo che (a,b) è combinazione lineare di v e w e scriveremmo:

$$(a,b) \in <(1,2), (3,4)> \qquad \left(\Rightarrow \mathbb{R}^2 \subseteq <(1,2),(3,4)> \right)$$

Ne segue che $<(1,2),(3,4)> = \mathbb{R}^2$, cioè $(1,2)$ e $(3,4)$ "generano" tutto $\mathbb{R}^2$ attraverso le loro combinazioni lineari.

Diremo che $\{(1,2),(3,4)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$.

- $(0,0) = \lambda(1,2) + \mu(3,4) \iff \lambda = \mu = 0$,
  cioè l'unica combinazione lineare di $(1,2)$ e $(3,4)$ che restituisce il vettore nullo è quella banale.
  Diremo che $(1,2)$, $(3,4)$ sono linearmente indipendenti.

Più in generale definiamo:

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale su K.
Diciamo che $v_1, \dots, v_n \in V$ generano V oppure che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un SISTEMA DI GENERATORI di V se $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$.

<u>Osservazione</u>: Poichè abbiamo sempre $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq V$, per mostrare che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un sistema di generatori di V basterà dimostrare che

$$V \subseteq \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

cioè che

$$\forall\, v \in V,\ \exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in V \text{ tali che } v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale su K.
I vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI se

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0,$$

o equivalentemente se l'unica combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ che restituisce il vettore nullo è quella banale.

Altrimenti, se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ <u>non tutti nulli</u> tali che

$\Updownarrow$ $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0},$$

$v_1, \dots, v_n$ si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI.

<u>Esempio</u>

$V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = (8, -2, 0)$, $v_2 = (0, 3, 4)$, $v_3 = (-2, 2, 2)$

Domanda: sono linearmente indipendenti?

Siano λ, μ, δ tali che:

$$\lambda v_1 + \mu v_2 + \delta v_3 = \underline{0}$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda(8,-2,0) + \mu(0,3,4) + \delta(-2,2,2) = (0,0,0)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} 8\lambda - 2\delta = 0 \\ -2\lambda + 3\mu + 2\delta = 0 \\ 4\mu + 2\delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 + \frac{1}{4}R_1]{} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3/2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - \frac{4}{3}R_2]{} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8\lambda - 2\delta = 0 \\ 3\mu + \frac{3}{2}\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\delta}{4} \\ \mu = -\frac{1}{2}\delta \end{cases}$$

Quindi $\forall\ \delta \neq 0$ $\lambda = \frac{\delta}{4}$, $\mu = -\frac{1}{2}\delta$, δ sono i coefficienti di una combinazione lineare non banale che restituisca il vettore nullo.

Ad esempio, per $\delta = 4$ otteniamo $\lambda = 1$, $\mu = -2$, $\delta = 4$. Infatti si verifica facilmente che:

$$1 \cdot (8,-2,0) + (-2)(0,3,4) + 4 \cdot (-2,2,2) = (0,0,0).$$

Osservazioni

1) Un vettore $v \in V$ è linearmente dipendente se e solo se $v = \underline{0}$.

$\Leftarrow$) Se $v = \underline{0}$ allora $\underbrace{1 \cdot v}_{\text{combinazione lineare non banale}} = \underline{0} \Rightarrow v = \underline{0}$ è linearmente dipendente

$\Rightarrow$) se $v \in V$ è linearmente dipendente allora $\exists\ \lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ tale che

$$\lambda v = \underline{0} \underset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \lambda^{-1}\lambda v = \lambda^{-1}\underline{0} \Rightarrow 1 \cdot v = \underline{0} \Rightarrow v = \underline{0}.$$

2) Due vettori $v_1, v_2 \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\exists\ \lambda \in K$ tale che

$$v_1 = \lambda v_2 \quad o \quad v_2 = \lambda v_1 .$$

Esempio: • $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (3,6,9) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti, poiché $v_2 = 3v_1$ $(\Rightarrow 3v_1 + (-1)v_2 = \underline{0})$

• $v_1 = (5,-8,1)$, $v_2 = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti poiché $v_2 = 0 \cdot v_1$ $(\Rightarrow 0 \cdot v_1 + (-1) v_2 = \underline{0})$

dim

$\Leftarrow)$ Se $v_1 = \lambda v_2$, $\lambda \in K \Rightarrow v_1 + (-\lambda) v_2 = \underline{0}$.

Se $v_2 = \lambda v_1$, $\lambda \in K \Rightarrow v_2 + (-\lambda) v_1 = \underline{0}$.

In ogni caso v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti

$\Rightarrow)$ Supponiamo che v_1, v_2 sono linearmente dipendenti. Allora $\exists\ \lambda_1, \lambda_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ tali che:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \underline{0}$$

Allora:

se $\lambda_1 \neq 0$, $v_1 = \underbrace{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}_{\in K} v_2$

se $\lambda_2 \neq 0$, $v_2 = \underbrace{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}_{\in K} v_1$

Abbiamo quindi mostrato che $\exists\ \lambda \in K$ tale che:

$$v_1 = \lambda v_2 \quad o \quad v_2 = \lambda v_1 .$$

3) n vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\exists\ i \in \{1, \dots, n\}$ tale che v_i è combinazione degli altri.

dim: per esercizio

4) Se l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ contiene il vettore nullo allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

dim: per esercizio

Concludiamo questa lezione con una definizione che commenteremo in dettaglio la prossima volta.

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K.
Un sottoinsieme finito $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V si dice **BASE** di V se:

1) $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.
2) $v_1, \dots, v_n$ generano V:
$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V,$$
cioè $\forall\, v \in V$, $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che
$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$