LEZIONE 18 - GEOMETRIA e ALGEBRA

11/05/22

Dati due K-spazi vettoriali V e W, con basi rispettive $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$, $\mathcal{B}'=\{w_1,\dots,w_m\}$, e data un'applicazione lineare $f: V \to W$, nell'ultima lezione abbiamo definito la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$:

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

dove $\forall\, j=1,\dots,n$, $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$.

(ovvero la colonna j-esima di $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)$ è costituita dalle coordinate di $f(v_j)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$).

Esempio

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x+2y+3z,\ -x+5y-7z)$$

Consideriamo le basi:

- $\mathcal{B}=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$,
- $\mathcal{B}'=\{(1,1),(1,-1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

Vogliamo scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

Allora abbiamo:

$$f(1,0,0) = (1,-1) = 0\cdot(1,1) + 1\cdot(1,-1)$$
$$f(0,1,0) = (2,5) = \frac{7}{2}\cdot(1,1) - \frac{3}{2}(1,-1)$$
$$f(0,0,1) = (3,-7) = -2\cdot(1,1) + 5\cdot(1,-1)$$

per determinare 7/2 e -3/2 abbiamo risolto il sistema che si ottiene da:

$$(2,5) = a(1,1) + b(1,-1)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=5. \end{cases}$$

Quindi otteniamo:

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

Vediamo ora che questa matrice $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)$ ci permette di calcolare l'immagine di un vettore $v\in V$ con un semplice prodotto di matrici.

Calcolo dell'immagine di un vettore

Proposizione: Siano V e W due spazi vettoriali e $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$, $\mathcal{B}'=\{w_1,\dots,w_m\}$ basi di V e W rispettivamente.

Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare. Allora per ogni

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$$

si ha

$$f(v) = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m \in W$$

dove

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$(y_1,\dots,y_m)$ sono le coordinate di $f(v)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$

$(x_1,\dots,x_n)$ sono le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esempio

Torniamo all'esempio precedente dove avevamo calcolato

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Sia $v = (1,-2,-1) \in \mathbb{R}^3$ ($(1,-2,-1)$ sono proprio le coordinate rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$).

Calcoliamo:

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)\cdot v = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \to$$

queste sono le coordinate di $f(1,-2,-1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'=\{(1,1),(1,-1)\}$

$$\Rightarrow f(1,-2,-1) = -5\cdot(1,1) - 1\cdot(1,-1) = (-6,-4) \to$$

queste sono le coordinate di $f(1,-2,-1)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Usando l'espressione di f si verifica facilmente che $f(1,-2,-1)=(-6,-4)$

Composizione di applicazioni lineari

Vediamo ora che la composizione di applicazioni di applicazioni lineari corrisponde al prodotto delle matrici associate.

Consideriamo tre K-spazi vettoriali:

V con base $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$
W con base $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$
U con base $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_p\}$.

Siano $f: V \longrightarrow W$ e $g: W \longrightarrow U$ due applicazioni lineari.
Poiché $f(V)$ è contenuto nel dominio di g, possiamo considerare la composizione di f e g:

$$g \circ f : V \longrightarrow U.$$

Vogliamo studiare la relazione tra la matrice $M_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_V}(g \circ f)$ e le matrici $M_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_W}(g)$.

Sia $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$. Allora, per la proposizione precedente abbiamo:

$$f(v) = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m \in W, \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Inoltre

$$g(f(v)) = z_1 u_1 + \dots + z_p u_p, \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_W}(g) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_W}(g) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_W}(g)\, M_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ne segue che:

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_V}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_W}(g)\, M_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}(f)}$$

ossia la matrice $M_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_V}(g \circ f)$ associata a $g \circ f$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_U$ si ottiene moltiplicando le matrici $M_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_W}(g)$ e $M_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}(f)$ associate rispettivamente a g e a f.

La matrice del cambiamento di coordinate

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ e $\mathcal{B}'=\{v_1',\dots,v_n'\}$ due basi di V.

Consideriamo l'applicazione identità id_V

$$
\begin{array}{rccc}
 & \overset{\mathcal{B}}{} & & \overset{\mathcal{B}'}{} \\
id_V: & V & \longrightarrow & V. \\
 & v & \longmapsto & v
\end{array}
$$

e immaginiamo lo spazio di partenza dotato della base $\mathcal{B}$ e lo spazio di arrivo dotato della base $\mathcal{B}'$.

La matrice $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_V)$ è detta MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI COORDINATE dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, in quanto, conoscendo le coordinate di un vettore v rispetto alla base $\mathcal{B}$, permette di calcolare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Infatti, sia $v\in V$. Allora

$$
\begin{aligned}
v &= x_1v_1+\dots+x_nv_n \\
&\parallel \\
id(v) &= y_1v_1'+\dots+y_nv_n'.
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_V)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
$$

Vediamo ora che le matrici $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_V)$ e $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V)$ sono inverse l'una dell'altra:

$$
M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V)\cdot {}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_V) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V\circ id_V) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V) = I_n.
$$

$$
\begin{aligned}
id_V(v_1) &= 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2+\dots+0\cdot v_n \\
&\vdots \\
id_V(v_n) &= 0\cdot v_1+\dots+0\cdot v_{n-1}+v_n
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\boxed{M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V) = \left(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_V)\right)^{-1}}
$$

Esempio

Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo le basi seguenti di $\mathbb{R}^3$:

$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ (base canonica)

$\mathcal{B}' = \{(1,-1,0), (0,-2,-1), (1,1,2)\}$ (ci si può convincere che tali vettori formano una base mostrando che $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$)

Calcoliamo $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V)$: poiché $id(v) = v \ \forall v \in \mathbb{R}^3$, basterà decomporre ogni vettore di $\mathcal{B}'$ sulla base canonica $\mathcal{B}$:

$id_V(1,-1,0) = (1,-1,0) = 1 \cdot (1,0,0) + (-1) \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$,

$id_V(0,-2,-1) = (0,-2,-1) = 0 \cdot (1,0,0) + (-2)(0,1,0) + (-1)(0,0,1)$,

$id_V(1,1,2) = (1,1,2) = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 2(0,0,1)$.

Quindi:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

ovvero se $\mathcal{B}$ è la base canonica, $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V)$ è semplicemente la matrice le cui colonne sono i vettori di $\mathcal{B}'$.

La matrice $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_V)$ è invece più "difficile" da calcolare. Si può procedere in due modi distinti:

1) Calcolando l'inversa di $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V)$ con uno dei metodi visti durante il corso (algoritmo di Gauss-Jordan, matrice dei cofattori, etc.)

2) Decomponendo i vettori della base canonica sulla base $\mathcal{B}'$:

es: $(1,0,0) = \underset{\frac{3}{2}}{??} \cdot (1,-1,0) + \underset{-1}{??}(0,-2,-1) + \underset{-\frac{1}{2}}{??} \cdot (1,1,2)$.

(risolvendo il sistema) $\rightarrow$ $\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$

In ogni caso si trova $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_V) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

e si può facilmente verificare che $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V) \cdot M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_V) = I_3$.

ENDOMORFISMI DI SPAZI VETTORIALI

Ci concentriamo ora sul caso particolare degli endomorfismi.
Richiamiamo innanzitutto la definizione:

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale. Un **ENDOMORFISMO** o un **OPERATORE LINEARE** di V è un'applicazione lineare

$$f: V \longrightarrow V.$$

L'insieme degli endomorfismi di V si denota **End(V)**.

Sia $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di V e sia $f\in \mathrm{End}(V)$. Allora:

$$M_{\mathcal{B}}(f) := M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(K).$$

Se $\mathcal{B}'=\{v_1',\dots,v_n'\}$ è un'altra base di V allora, per quanto visto precedentemente

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_V)\cdot M_{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V).$$

un diagramma può aiutare a "visualizzare" questo prodotto di matrici.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{B})\ V \arrow[r, "f"] & V\ (\mathcal{B}) \arrow[d, "id_V"] \\
(\mathcal{B}')\ V \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"] & V\ (\mathcal{B}')
\end{tikzcd}$$

Ora, applicando il teorema di Binet, otteniamo:

$$\det\left(M_{\mathcal{B}'}(f)\right) = \det\big(\underbrace{M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_V)}_{=\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V)\right)^{-1}}\big)\cdot \det\left(M_{\mathcal{B}}(f)\right)\cdot \det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V)\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V)\right)}}\cdot \det\left(M_{\mathcal{B}}(f)\right)\cdot \cancel{\det\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_V)\right)} = \det\left(M_{\mathcal{B}}(f)\right).$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Ciò mostra che il determinante della matrice associata ad f non dipende dalla scelta della base. Pertanto possiamo parlare del **determinante** dell'operatore f e lo denotiamo **det(f)**.

Tra tutte le basi di V siamo particolarmente interessati a quelle, se esistono, rispetto a cui la la matrice associata a $f: V \to V$ è diagonale.

Cerchiamo di capire il "vantaggio" di queste basi con un esempio, che interpreteremo anche da un punto di vista geometrico.

Sia $V = \mathbb{R}^2$, sia $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$ una base di $\mathbb{R}^2$ e sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (matrice diagonale).

Poniamo $v_1 := (1,1)$ e $v_2 := (1,-1)$. Determiniamo le immagini di v_1 e v_2:

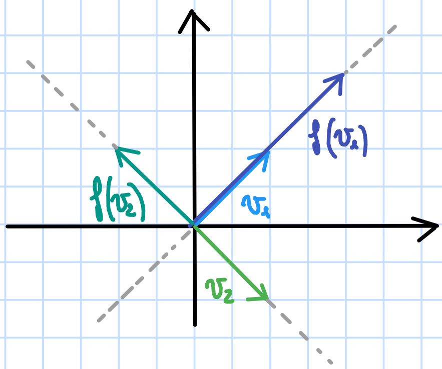
$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = 2v_1 = (2,2)$$

v_1 ha coordinate $(1,0)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Infatti: $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$.

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 0 \cdot v_1 + (-1) v_2 = -v_2 = (-1,1)$$

Vediamo quindi che $f(v_1)$ e $f(v_2)$ sono multipli rispettivamente di v_1 e v_2.

Da un punto di vista geometrico ciò significa che v_1 e $f(v_1)$ giacciono sulla stessa retta vettoriale. Stessa cosa per v_2 e $f(v_2)$.



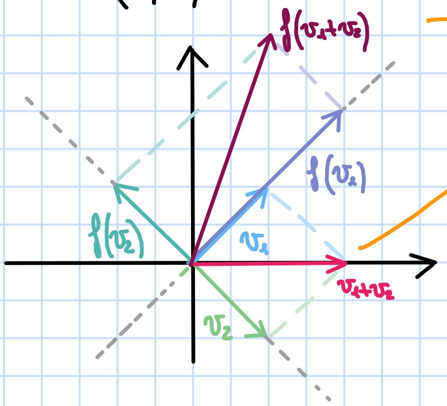
Mostreremo che questa è una proprietà che vale solo per i vettori in $\langle v_1 \rangle$ e $\langle v_2 \rangle$.

Ad esempio:

$$f(v_1+v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_B = 2v_1 - v_2 = (1,3)$$

$$\overset{\shortparallel}{f(2,0)}$$

e $(3,1)$ non è collineare a $(2,0)$.



v_1+v_2 e $f(v_1+v_2)$ non hanno la stessa direzione

Poiché $f(v_1) = 2v_1$ e $f(v_2) = -v_2$:

- chiameremo v_1 e v_2 "autovettori";
- chiameremo 2 e -1 gli "autovalori" relativi rispettivamente agli autovettori v_1 e v_2.
- chiameremo le rette vettoriali $\langle v_1 \rangle$ e $\langle v_2 \rangle$ gli "autospazi" relativi rispettivamente agli autovalori 2 e -1.
- chiameremo $\{v_1, v_2\}$ una "base diagonalizzante" per f.
- diremo che f è un operatore "diagonalizzabile".

Più formalmente abbiamo le seguenti definizioni:

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale su K. Un endomorfismo $f \in End(V)$ si dice DIAGONALIZZABILE se esiste una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V tale che $M_B(f)$ sia una matrice diagonale, cioè della forma:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K.$$

Se ciò avviene B è detta una BASE DIAGONALIZZANTE per f e per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha

$$\underbrace{f(v_i)}_{\text{autovettore}} = \underbrace{\lambda_i}_{\text{autovalore}} v_i.$$

(definiti nella definizione seguente)

<u>Osservazione</u>: Parliamo di <u>una</u> base diagonalizzante, in quanto vedremo che se esiste non è unica.

Def: Sia V uno spazio vettoriorale su K e sia $f \in End(V)$. Un vettore $v \in V$ si dice un AUTOVETTORE di f se $v \neq \underline{0}$ e se esiste $\lambda \in K$ tale che

$$f(v) = \lambda v.$$

Lo scalare λ è detto l'AUTOVALORE di f relativo all'autovettore v.

Il sottoinsieme di K costituito da tutti gli autovalori di f è detto SPETTRO di f.

Esempi

- Sia V uno spazio vettoriale tale che $\dim(V) = n$. Sia $f = id_V$ l'applicazione identità.

  Allora $\forall v \in V$ si ha

  $$f(v) = v = 1 \cdot v.$$

  Quindi ogni vettore in $V \setminus \{\underline{0}\}$ è un autovettore di f con autovalore uguale a 1.

  In particolare ogni base $\mathcal{B}$ di V è diagonalizzante in quanto si ha:

  $$M_{\mathcal{B}}(id_V) = I_n.$$

  matrice identità

- Sia $f \in End(V)$ tale che $Ker(f) \neq \{\underline{0}\}$.

  Sia $v \in Ker(f) \setminus \{\underline{0}\}$. Allora:

  $$f(v) = \underline{0} = 0 \cdot v,$$

  ossia tutti i vettori <u>non nulli</u> del nucleo di f sono autovettori con autovalore 0.

  Viceversa, se v è un autovettore con autovalore 0, allora $v \in Ker(f)$.