Geometria e Algebra - MIS-Z

Secondo appello - Luglio - Soluzioni

03/07/2023

Nome e Cognome:

Corso di laurea:

Matricola:

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti (di cui 2 punti sono attribuiti in base alla qualità della redazione). Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.
Le risposte devono inoltre essere inserite negli appositi spazi bianchi e si potranno allegare fogli supplementari solo previa autorizzazione della docente.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Redazione	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) I vettori $(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)$ generano $\mathbb{R}^4$.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Tre vettori non possono mai generare uno spazio di dimensione 4. Nel nostro caso si può vedere facilmente che il vettore $(0,0,0,1)$ non si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)$: infatti se λ,μ,δ sono tali che

$$\lambda(1,0,0,0)+\mu(1,1,0,0)+\delta(1,1,1,0)=(0,0,0,1) \Rightarrow 0=1.$$

(b) L'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (0,x+y). \end{array}$$

è iniettiva.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Si ha $f(1,-1)=(0,0)$, quindi $\ker(f)\neq\{(0,0)\}$ e f non è iniettiva.

(c) Nel piano $\mathbb{E}^2$, la retta r passante per i punti $A(1,0)$ e $B(0,-3)$ e la retta s passante per i punti $C(-2,1)$ e $D(4,-1)$ sono perpendicolari.

■ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

Per stabilire se le due rette sono perpendicolari, basta calcolare il prodotto scalare dei corrispondenti vettori direttori. Un vettore direttore di r è $\overrightarrow{AB} = (-1,-3)$ e un vettore direttore di s è $\overrightarrow{CD} = (6,-2)$. Quindi abbiamo

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = \langle (-1,-3), (6,-2) \rangle = -6+6 = 0,$$

quindi $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono ortogonali e pertanto le rette r e s sono perpendicolari.

(d) Siano $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ due matrici invertibili. Allora la matrice $A+B$ è invertibile.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le matrici A e B sono chiaramente invertibili, in quanto hanno determinante uguale a 1. Tuttavia si ha

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e la matrice nulla non è invertibile.

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} kX_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = 1 \\ X_2 + 2X_3 + kX_4 = 0 \\ kX_1 + X_2 - 3X_3 - 2X_4 = 1 \\ X_1 + X_3 = 1 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**
$k \in \mathbb{R} \setminus \{3, -5\}$	SI	1	$\left\{\left(\frac{6}{k+5}, \frac{2-2k}{k+5}, \frac{k-1}{k+5}, 0\right)\right\}$
$k = 3$	SI	∞^1	$\left\{\left(\frac{6+5t}{8}, \frac{-7t-2}{4}, \frac{2-5t}{8}, t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$
$k = -5$	NO	0	-

Svolgimento

Consideriamo la matrice orlata $(A|b)$ associate al sistema:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} k & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k & 0 \\ k & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_1 \leftrightarrow R_4$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 - kR_1$,
3. $R_4 \leftarrow R_4 - kR_1$,
4. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,
5. $R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2$,
6. $R_4 \leftarrow R_4 - R_3$,

si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k-5 & -2-k & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & 3-k & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>**CASO 1**</u>. Notiamo che se $k \neq -5$ e $k \neq 3$, allora la matrice dei coefficienti e la matrice orlata hanno entrambe rango 4. Quindi, per il teorema di Rouché–Capelli, il sistema è compatibile ed ammette l'unica soluzione $\left(\frac{6}{k+5}, \frac{2-2k}{k+5}, \frac{k-1}{k+5}, 0\right)$.

CASO 2. Se $k = 3$ allora si ottiene la matrice a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso la matrice dei coefficienti e la matrice orlata hanno entrambe rango 3. Quindi, per il teorema di Rouché–Capelli, il sistema è compatibile ed ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Scegliendo X_4 come variabile libera, otteniamo che per $k = 3$ l'insieme delle soluzioni è

$$S_3 = \left\{ \left(\frac{6+5t}{8}, \frac{-7t-2}{4}, \frac{2-5t}{8}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

CASO 3. Se $k = -5$ allora si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effettuando l'ulteriore operazione $R_4 \leftarrow R_4 - \frac{8}{3} R_3$, si ottiene la matrice a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che l'ultima riga corrisponde all'equazione $0 = -16$, pertanto il sistema è incompatibile.

ESERCIZIO 3 [7 punti]. **Una famiglia di endomorfismi di $\mathbb{R}^3$.**

Per $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (3x + kz, 12x + 3y + 4z, -6x + ky + z). \end{array}$$

(a) Si mostri che f_k è un isomorfismo per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Svolgimento

Sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Dall'espressione di f_k abbiamo

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & k \\ 12 & 3 & 4 \\ -6 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione f_k è un isomorfismo se e solo se $\det(A_k) \neq 0$. Abbiamo

$$\det(A_k) = 12k^2 + 6k + 9.$$

Notiamo che l'equazione di secondo grado $12k^2 + 6k + 9 = 0$ non ha soluzioni, poiché $\Delta = 36 - 4 \cdot 9 \cdot 12 < 0$. Concludiamo quindi che f_k è un isomorfismo per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(b) Si richiami la definizione di autovettore e di autovalore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $f : V \to V$ un endomorfismo di V. Un vettore non nullo $v \in V$ è detto *autovettore* di f se esiste $\lambda \in K$ tale che $f(v) = \lambda v$. In tal caso λ è detto l'*autovalore* relativo all'autovettore v.

(c) Si determinino i valori di k per cui il vettore $(1, 2, 1)$ è un autovettore di f_k. Per tali valori di k si determini l'autovalore corrispondente.

Svolgimento

Il vettore $v = (1, 2, 1)$ è un autovettore di f_k se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f_k(v) = \lambda v$. Abbiamo

$$f_k(v) = \lambda v \Leftrightarrow f_k(1, 2, 1) = \lambda(1, 2, 1) \Leftrightarrow (3 + k, 22, -5 + 2k) = (\lambda, 2\lambda, \lambda).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \lambda = 3 + k \\ 2\lambda = 22 \\ \lambda = -5 + 2k \end{cases}$$

nelle incognite k e λ, si ottiene la soluzione $\lambda = 11$ e $k = 8$. Quindi $(1, 2, 1)$ è un autovettore di f_k se e solo se $k = 8$, e in tal caso l'autovalore corrispondente è $\lambda = 11$.

(d) Per $k = 0$, si determini se f_0 è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base diagonalizzante.

Svolgimento

Per $k = 0$ abbiamo

$$\begin{array}{rccc} f_0 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (3x, 12x + 3y + 4z, -6x + z). \end{array}$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. La matrice associata a f_0 rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 12 & 3 & 4 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per determinare se f_0 è diagonalizzabile, cominciamo con il determinare gli autovalori di f_0, trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{vmatrix} 3-T & 0 & 0 \\ 12 & 3-T & 4 \\ -6 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = -T^3 + 7T^2 - 15T + 9 = -(T-3)^2(T-1).$$

Pertanto gli autovalori di f_0 sono 3 e 1 con molteplicità algebrica rispettivamente 2 e 1. Per ognuno di essi determiniamo l'autospazio corrispondente:

- $V_3(f_0) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(0, 1, 0), (1, 0, -3)\}.$

- $V_1(f_0) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(0, -2, 1)\}.$

Poiché $\dim(V_3(f_0)) = 2$, la moltiplicità algebrica e geometrica di 3 coincidono. Ne segue che l'operatore f_0 è diagonalizzabile e l'unione delle basi dei due autospazi $V_3(f_0)$ e $V_1(f_0)$

$$\mathcal{B}' = \{(0, 1, 0), (1, 0, -3), (0, -2, 1)\}$$

è una base diagonalizzante per f_0.

ESERCIZIO 4 [6 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si considerino i punti $A(0,-1,-1)$, $B(3,2,1)$ e $C(1,1,0)$ di $\mathbb{E}^3$. Dopo aver mostrato che A, B e C non sono allineati, si determini il punto D tale che $ABCD$ sia un parallelogramma e se ne determini l'area.

Svolgimento

Abbiamo $\overrightarrow{AB} = (3,3,2)$ e $\overrightarrow{AC} = (1,2,1)$. Poiché i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ non sono multiplo l'uno dell'altro, allora i punti A, B e C non sono allineati.

Sia $D(x_D, y_D, z_D) \in \mathbb{E}^3$ il punto tale che $ABCD$ sia un parallelogramma. Ricordiamo che un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ha due lati opposti paralleli e congruenti. In termini vettoriali, $ABCD$ è un parallelogramma se e solo se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (si faccia attenzione all'orientazione dei vettori). Nel nostro caso abbiamo $\overrightarrow{AB} = (3,3,2)$ e $\overrightarrow{DC} = (1-x_D, 1-y_D, -z_D)$. Imponendo che $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ otteniamo

$$\begin{cases} 1-x_D = 3 \\ 1-y_D = 3 \\ -z_D = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -2 \\ z_D = -2 \end{cases}.$$

Quindi le coordinate di D sono $(-2,-2,-2)$.

Infine l'area del parallelogramma $ABCD$ è data dalla norma del prodotto vettoriale di $\overrightarrow{AB}$ per $\overrightarrow{AD}$:

$$Area(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \|(3,3,2),(-2,-1,-1)\| = \|(-1,-1,3)\| = \sqrt{11}.$$

(b) Si scrivano le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano π passante per i punti A, B e C.

Svolgimento

Per scrivere le equazioni parametriche di π abbiamo bisogno di un punto del piano e di due vettori non collineari della giacitura. Scegliamo:

- Punto: $A(0, -1, -1)$;
- Vettori non collineari della giacitura: $\overrightarrow{AB} = (3, 3, 2)$ e $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 1)$.

Quindi

$$\pi : \begin{cases} x = 3s + t \\ y = 3s + 2t - 1 \\ z = 2s + t - 1 \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana di π ricaviamo s e t dalla prima e dalla terza equazione e le sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} t = x - 3s \\ y = 3s + 2t - 1 \\ z = 2s + t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x - 3s \\ y = 3s + 2t - 1 \\ z = 2s + x - 3s - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x - 3s \\ y = 3s + 2t - 1 \\ s = x - z - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = x - 3(x - z - 1) \\ y = 3s + 2t - 1 \\ s = x - z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2x + 3z + 3 \\ y = 3s + 2t - 1 \\ s = x - z - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 3(x - z - 1) + 2(-2x + 3z + 3) - 1 \Rightarrow x + y - 3z - 2 = 0.$$

Un'equazione cartesiana di π è quindi:

$$\pi : X + Y - 3Z - 2 = 0.$$

(c) Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri il piano π_k definito dall'equazione cartesiana

$$\pi_k : kX + (4-k)Y - 3kZ - k = 0.$$

Al variare di k si determini la posizione reciproca di π e π_k. Per i valori di k per cui π e π_k sono paralleli si calcoli la distanza tra i due piani.

Svolgimento

Dalle equazioni cartesiane di π e π_k si legge facilmente che due vettore normali sono rispettivamente $v = (1, 1, -3)$ e $w_k = (k, 4-k, -3k)$.
Ora i piani π e π_k sono paralleli se e solo se v e w_k sono collineari, ovvero, se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $w_k = \lambda v$. Abbiamo

$$w_k = \lambda v \Leftrightarrow (k, 4-k, -3k) = \lambda(1, 1, -3) \Leftrightarrow \begin{cases} k = \lambda \\ 4 - k = \lambda \\ -3k = -3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow k = 2.$$

Quindi π_k è parallelo a π se e solo se $k = 2$, per cui si ottiene:

$$\pi_2 : 2X + 2Y - 6Z - 2 = 0 \Leftrightarrow \pi_2 : X + Y - 3Z - 1 = 0.$$

Sia $A(0, -1, -1) \in \pi$. La distanza tra π e π_2 è data dalla distanza di A da π_2:

$$d(\pi, \pi_2) = d(A, \pi_2) = \frac{|-1+3-1|}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}.$$

In particolare, poiché $d(\pi, \pi_2) > 0$, i piani π e π_2 sono paralleli disgiunti.
Infine, per ogni $k \neq 2$, i piani π e π_k sono incidenti.

ESERCIZIO 5 [7 punti]. **Sottospazi vettoriali e somma diretta.**

(a) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e siano U e W due sottospazi vettoriali di V. Si definisca quando V è somma diretta di U e di W.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e siano U e W due sottospazi vettoriali di V. Lo spazio V si dice somma diretta di U e di W se $V = U + W$ e $U \cap W = \{0_V\}$.

(b) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e siano U e W due sottospazi vettoriali di V. Si dimostri che se $V = U \oplus W$ allora ogni elemento di V si scrive in modo unico come somma di un elemento di U e di un elemento di W.

Dimostrazione

Vogliamo mostrare che se $V = U \oplus W$, allora $\forall v \in V \quad \exists!\,(u, w) \in U \times W$ tale che $v = u + w$.

Esistenza. L'esistenza è data dal fatto che, se $V = U \oplus W$, allora in particolare $V = U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$.

Unicità. Siano $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$ tali che

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2.$$

Ne segue che

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1.$$

Notiamo che $u_1 - u_2 \in U$ (poiché U è un sottospazio vettoriale) e inoltre $u_1 - u_2 \in W$ (poiché è uguale all'elemento $w_2 - w_1$ di W). Ma quindi $u_1 - u_2 \in U \cap W = \{\underline{0}\}$ (dalla definizione di somme diretta), da cui $u_1 = u_2$.

In modo analogo concludiamo che $w_1 = w_2$, ottenendo quindi che $(u_1, w_1) = (u_2, w_2)$.

(c) Sia $h \in \mathbb{R}$ e sia

$$U_h = Span\{(h, -2, 1, 1), (-1, h, 1, 0), (6, 4, h, 2), (3, 2, 2, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Al variare di h si determini la dimensione di U_h.

Svolgimento

Il sottospazio U_h ha dimensione 4 se e solo se la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} h & -2 & 1 & 1 \\ -1 & h & 1 & 0 \\ 6 & 4 & h & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo. Utilizzando il teorema di Laplace troviamo

$$\det(A) = h^3 - 7h^2 + 8h + 16 = (h-4)^2(h+1).$$

Quindi $\dim(U_h) = 4$ se e solo se $h \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$.
Non rimane che determinare la dimensione di U_h nei casi $h = -1$ e $h = 4$.

- **Caso** $h = -1$. Per $h = -1$ otteniamo la matrice

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 + 6R_1$,
3. $R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1$,
4. $R_3 \leftarrow R_3 + 8R_2$,
5. $R_4 \leftarrow R_4 + 4R_2$,
6. $R_4 \leftarrow R_4 - R_3$,

si ottiene la matrice a scalini $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pertanto $\dim(U_{-1}) = \mathrm{rg}(A_{-1}) = 3$.

- **Caso** $h = 4$. Per $h = 4$ otteniamo la matrice

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_1 \leftrightarrow R_2$,
2. $R_2 \leftarrow R_2 + 4R_1$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 + 6R_1$,
4. $R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1$,
5. $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$,
6. $R_4 \leftarrow R_4 - R_2$,

si ottiene la matrice a scalini $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pertanto $\dim(U_4) = \mathrm{rg}(A_4) = 2$.

(d) Per $h = 4$ si determini un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U_4 \oplus W$.

Svolgimento

Nel punto (c) abbiamo visto che U_4 ha dimensione 2 e che una sua base è data dall'insieme $\{(1,4,1,0),(0,14,5,1)\}$.
Sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U_4 \oplus W$. Allora, dalla formula di Grassmann otteniamo che $\dim(W) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(U_4) = 4 - 2 = 2$. Ci basterà quindi determinare due vettori $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ tali che i vettori $w_1, w_2, (1,4,1,0), (0,14,5,1)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$. Possiamo allora scegliere $w_1 = (0,0,1,0)$ e $w_2 = (0,0,0,1)$. Si vede infatti facilmente che

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0.$$

In conclusione un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che soddisfa le condizioni richieste è $W = Span\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.