Geometria e Algebra - MIS-Z

Terzo appello - Settembre - Soluzioni

05/09/2023

Nome e Cognome:

Corso di laurea:

Matricola:

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti (di cui 2 punti sono attribuiti in base alla qualità della redazione). Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.
Le risposte devono inoltre essere inserite negli appositi spazi bianchi e si potranno allegare fogli supplementari solo previa autorizzazione della docente.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Redazione	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) Il sottoinsieme $W = \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Il sottoinsieme W non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ poiché non contiene il vettore nullo $(0, 0)$.

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

è invertibile.

■ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

Con un semplice conto si ottiene

$$\det(A_k) = -k^2 - 1.$$

In particolare $\det(A_k) \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ e quindi A_k è invertibile per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^{2023} \to \mathbb{R}^{2022}$ un'applicazione lineare suriettiva, allora $\ker(f)$ ha dimensione 1.

- ■ **VERO**
- ☐ **FALSO**

Giustificazione

Poiché la funzione è suriettiva, l'immagine di f ha dimensione 2022. Per il teorema del rango quindi si ha

$$\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^{2023}) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2023 - 2022 = 1.$$

(d) L'intersezione di tre piani nello spazio $\mathbb{E}^3$ a due a due non coincidenti è sempre l'insieme vuoto.

- ☐ **VERO**
- ■ **FALSO**

Giustificazione

Ad esempio i piani $X = 0$, $Y = 0$ e $Z = 0$ si intersecano nel punto $(0, 0, 0)$.

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} X - Y + kZ = 1 \\ -X + kY - Z = -1 \\ kX - Y + Z = 1 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**
$k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$	SI	1	$\left\{\left(\frac{1}{k+2}, -\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}\right)\right\}$
$k = -2$	NO	0	-
$k = -1$	SI	∞^2	$\{(1 + s - t, s, t)\,, s, t \in \mathbb{R}\}$

Svolgimento

Consideriamo la matrice dei coefficienti A e la matrice orlata $(A|b)$ associate al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 1 \\ -1 & k & -1 & -1 \\ k & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo innanzitutto i valori di k tali che $\det(A) \neq 0$. Infatti per tali valori avremo $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 3$ e quindi, per Rouché–Capelli, il sistema sarà compatibile ed ammetterà un'unica soluzione che determineremo con il metodo di Cramer. Abbiamo

$$\det(A) = -k^3 + 3k - 2 = -(k-1)^2(k+2) \Leftrightarrow k = -2 \text{ o } k = 1.$$

<u>**CASO 1**</u>. Sia dunque $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Applicando il metodo di Cramer otteniamo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-k^2 + 2k - 1}{-(k-1)^2(k+2)} = \frac{1}{k+2}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & -1 & -1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{k^2 - 2k + 1}{-(k-1)^2(k+2)} = -\frac{1}{k+2}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-k^2 + 2k - 1}{-(k-1)^2(k+2)} = \frac{1}{k+2}.$$

Quindi per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ l'insieme delle soluzioni è

$$S_k = \left\{\left(\frac{1}{k+2}, -\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}\right)\right\}.$$

CASO 2. Se $k = -2$ allora la matrice orlata è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

In tal caso abbiamo quindi $\mathrm{rg}(A) = 2$ e $\mathrm{rg}(A|b) = 3$. Dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema è incompatibile.

CASO 3. Se $k = 1$ allora la matrice orlata è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In tal caso abbiamo quindi $\mathrm{rg}(A) = 1 = \mathrm{rg}(A|b)$. Dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema è compatibile ed ammette $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni. Scegliendo Y e Z come variabili liberz otteniamo l'insieme di soluzioni

$$S_1 = \{(1 + s - t, s, t)\,, s, t \in \mathbb{R}\}.$$

ESERCIZIO 3 [7 punti]. **Una famiglia di endomorfismi di $\mathbb{R}^3$.**

(a) Siano V e W due spazi vettoriali su un campo k. Si definisca quando una funzione $f : V \to W$ è un'applicazione lineare.

Definizione

Siano V e W due spazi vettoriali su k. Una funzione $f : V \to W$ si dice un'*applicazione lineare* se

- per ogni $v_1, v_2 \in V$, $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$;
- per ogni $v \in V$, per ogni $\lambda \in k$, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

(b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Si definisca il nucleo di f e si dimostri che esso è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Il nucleo di f è il sottoinsieme

$$\ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0_W\}.$$

Mostriamo che $\ker(f)$ è un sottospazio vettoriale di V. Siano dunque $v_1, v_2 \in \ker(f)$ e $\lambda, \mu \in k$. Allora

$$f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = \lambda \cdot 0_W + \mu \cdot 0_W = 0_W.$$

Quindi $\lambda v_1 + \mu v_2 \in \ker(f)$. Ne segue che $\ker(f)$ è un sottospazio vettoriale di V.

(c) Per $h \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f_h : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (3x+2y+hz, hx+2z, -7x-3y-2hz). \end{array}$$

(c1) Si determinino i valori di h tali che f_h non è suriettivo.

Svolgimento

Sia A_h la matrice associata a f_h rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Dall'espressione di f_h abbiamo

$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & 2 & h \\ h & 0 & 2 \\ -7 & -3 & -2h \end{pmatrix}.$$

L'applicazione f_h è suriettiva se e solo se $\mathrm{rg}(A_h) = 3$, ossia se e solo se $\det(A_h) \neq 0$. Abbiamo

$$\det(A_h) = h^2 - 10.$$

Pertanto f_h non è suriettiva se e solo se $h = \sqrt{10}$ o $h = -\sqrt{10}$.

(c2) Per $h = 3$, si determini se f_3 è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base diagonalizzante.

Svolgimento

Per $h = 3$ abbiamo

$$\begin{array}{rccc} f_3 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (3x + 2y + 3z, 3x + 2z, -7x - 3y - 6z). \end{array}$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. La matrice associata a f_3 rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ -7 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Per studiare la diagonalizzabilità di f_3 cominciamo con il determinare gli autovalori di f_3, trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$P_{f_3}(T) = \begin{vmatrix} 3 - T & 2 & 3 \\ 3 & -T & 2 \\ -7 & -3 & -6 - T \end{vmatrix} = -T^3 - 3T^2 - 3T - 1 = -(T + 1)^3.$$

Pertanto l'unico autovalore di f_3 è -1 con molteplicità algebrica 3. L'operatore f_3 sarà quindi diagonalizzabile se e solo se l'autospazio relativo a -1 ha dimensione 3. Abbiamo

$$V_{-1}(f_3) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(1, 1, -2)\}.$$

Poiché $V_{-1}(f_3)$ ha dimensione 1, segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore -1 non coincide con quella algebrica. Pertanto l'endomorfismo f_3 non è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 4 [7 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta $r \subseteq \mathbb{E}^3$ passante per i punti $A(0,-2,0)$ e $B(1,-4,1)$.

Svolgimento

Abbiamo $\overrightarrow{AB} = (1,-2,1)$ Scriviamo le equazioni parametriche di r utilizzando $\overrightarrow{AB}$ e A:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2t - 2 \\ z = t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana di r sostituiamo $t = x$ nella seconda e terza equazione:

$$\begin{cases} t = x \\ y = -2x - 2 \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Le equazioni cartesiane di r sono quindi:

$$r : \begin{cases} 2X + Y + 2 = 0 \\ X - Z = 0. \end{cases}$$

(b) Al variare di h in $\mathbb{R}$ si consideri la retta s_h descritta dalle equazioni cartesiane

$$s_h : \begin{cases} X + (h+1)Z = 0 \\ X + 2Y - 2hZ = -h \end{cases}$$

e si determini la posizione reciproca di r e s_h. Inoltre, quando r e s_h sono incidenti, se ne determini il punto di intersezione.

Svolgimento

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & h+1 & 0 \\ 1 & 2 & -2h & -h \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti delle equazioni cartesiane di r e s_h. Utilizzando il metodo di Laplace per il calcolo del determinante otteniamo:

$$\det(A) = h^2 - 2h - 8 = (h-4)(h+2).$$

Ne deduciamo che r e s_h sono sghembe se e solo se $h \neq -2$ e $h \neq 4$.
Per $h = -2$ o $h = 4$ le rette r e s_h sono complanari, e in base al loro numero di intersezioni determiniamo se sono incidenti, parallele disgiunte o parallele coincidenti.

- Sia $h = -2$. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2X + Y = -2 \\ X - Z = 0 \\ X - Z = 0 \\ X + 2Y + 4Z = 2 \end{cases}$$

  Risolvendo il sistema si ottiene l'unica soluzione $(6, -14, 6)$. Quindi le rette r e s_{-2} sono incidenti e si intersecano nel punto $(6, -14, 6) \in \mathbb{E}^3$.

- Sia $h = 4$. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2X + Y = -2 \\ X - Z = 0 \\ X + 5Z = 0 \\ X + 2Y - 8Z = -4 \end{cases}$$

  Risolvendo il sistema si ottiene l'unica soluzione $(0, -2, 0)$. Quindi le rette r e s_4 sono incidenti e si intersecano nel punto $(0, -2, 0) \in \mathbb{E}^3$.

(c) Per uno dei valori trovati in (b) per cui r e s_h sono incidenti, si determinino le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano che le contiene entrambe.

Svolgimento

Consideriamo il caso $h = -2$. La retta s_{-2} ha equazioni cartesiane:

$$s_{-2} : \begin{cases} X - Z = 0 \\ X + 2Y + 4Z = 2 \end{cases}$$

Notiamo che l'equazione $X - Z = 0$ appare sia nelle equazioni cartesiane di r che di s_{-2}. Pertanto possiamo concludere, senza alcun conto, che il piano $\pi : X - Z = 0$ contiene sia r che s_{-2}.

Altrimenti, si poteva procedere nel modo seguente. Per determinare il piano π contenente r e s_{-2} basta determinare tre punti non allineati che appartengono al piano. Ad esempio possiamo prendere un punto di r, un punto di s_{-2} e il punto di intersezione di r e s_{-2}. Quindi scegliamo $P_1(0, -2, 0) \in r$, $P_2(0, 1, 0) \in s_{-2}$ e $P_3(6, -14, 6)$.
Allora il piano π ha giacitura $Span\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\} = Span\{(0, 3, 0), (6, -12, 6)\}$ e passa per il punto P_1. Deduciamo quindi che π ha equazioni parametriche

$$\pi : \begin{cases} x = 6t \\ y = 3s - 12t - 2 \\ z = 6t \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Facilmente si vede che un'equazione cartesiane di π è $X - Z = 0$.

ESERCIZIO 5 [6 punti]. **Sottospazi vettoriali.**

(a) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito da
$$W = Span\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right\}.$$
Si determini la dimensione e una base di W.

Svolgimento

Le matrici $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sono chiaramente linearmente indipendenti, poiché non sono multiplo l'una dell'altra. Determiniamo se le matrici $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Siano $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$ tali che
$$\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{1}$$
Da (1) si ottiene il sistema omogeneo
$$\begin{cases}\lambda + 2\mu - \delta = 0\\ \mu - 2\delta = 0\\ \lambda + 3\delta = 0\\ 2\lambda + \mu + 4\delta = 0\end{cases}$$
che possiede infinite soluzioni.
Pertanto le matrici le matrici $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti. Ne segue che W ha dimensione 2 e una sua base è $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

(b) Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito da

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+b+c+d = 0 \right\}.$$

Si determini la dimensione e una base di U.

Svolgimento

Abbiamo

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Quindi U ha dimensione 3 e una base è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale $U \cap W$.

Svolgimento

Sia $A \in U \cap W$. Allora, poiché $A \in W$, si ha:

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \mu \\ \lambda & 2\lambda + \mu \end{pmatrix}.$$

Inoltre, poiché $A \in U$, la somma delle sue entrate è nulla, ovvero:

$$\lambda + 2\mu + \mu + \lambda + 2\lambda + \mu = 0 \Rightarrow 4\lambda + 4\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu.$$

Ne segue che

$$A = \begin{pmatrix} -\mu + 2\mu & \mu \\ -\mu & 2(-\mu) + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \mu \\ -\mu & -\mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$U \cap W = Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \right\},$$

ossia $U \cap W$ ha dimensione 1 e una sua base è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \right\}$.

(d) È vero che $U + W = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Svolgimento

Sì! Infatti dalla formula di Grassmann si ottiene:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Quindi $U + W$ è un sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ di dimensione 4. Ne segue che $U + W = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.