Geometria e Algebra - MIS-Z

Quarto appello - Ottobre - Soluzioni

16/10/2023

Nome e Cognome: ______________________________

Corso di laurea: ______________________________

Matricola: ______________________________

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti (di cui 2 punti sono attribuiti in base alla qualità della redazione). Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.
Le risposte devono inoltre essere inserite negli appositi spazi bianchi e si potranno allegare fogli supplementari solo previa autorizzazione della docente.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Redazione	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) Il vettore $(2, 2)$ è combinazione lineare dei vettori $(2, -1)$ e $(-2, 2)$.

■ **VERO**

□ **FALSO**

Giustificazione

I vettori $(2, -1)$ e $(-2, 2)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$ in quanto sono linearmente indipendenti. Ne segue che ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di $(2, -1)$ e $(-2, 2)$, e questo vale in particolare per $(2, 2)$.

(b) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

ha rango massimo.

□ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Con qualche conto si trova che $\det(A) = 0$, oppure, riducendo a scalini, si ottiene una matrice con una riga nulla. Quindi A non ha rango massimo.

(c) Esistono due sottospazi vettoriali U_1 e U_2 di $\mathbb{R}^3$ tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ contiene il vettore nullo $(0,0,0)$. Quindi $(0,0,0) \in U_1 \cap U_2$, per cui $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

(d) Se 0 è un autovalore di un'applicazione lineare $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, allora $\ker(f) \neq \{(0,0,0)\}$.

■ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

Se 0 è un autovalore di un'applicazione lineare $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, allora in $\mathbb{R}^3$ esiste $v \neq (0,0,0)$ tale che $f(v) = 0 \cdot v = (0,0,0)$. Quindi $v \in \ker(f)$ e $\ker(f) \neq \{(0,0,0)\}$.

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} kX + Y + Z = 2 \\ X + kY + Z = k \\ X + Y + 2Z = 2 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**
$k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$	SI	1	$\left\{\left(\frac{1}{2(k-1)}, \frac{2k-3}{2(k-1)}, \frac{1}{2}\right)\right\}$
$k = 0$	SI	∞^1	$\{(-t, 2-t, t)\,, t \in \mathbb{R}\}$
$k = 1$	NO	0	-

Svolgimento

Consideriamo la matrice orlata $(A|b)$ associate al sistema:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_1 \leftrightarrow R_3$,
2. $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 - kR_1$,
4. $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$,

si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & k-1 & -1 & k-2 \\ 0 & 0 & -2k & -k \end{pmatrix}.$$

<u>**CASO 1**</u>. Notiamo che se $k \neq 0$ e $k \neq 1$, allora la matrice dei coefficienti e la matrice orlata hanno entrambe rango 3. Quindi, per il teorema di Rouché–Capelli, il sistema è compatibile ed ammette l'unica soluzione $\left(\frac{1}{2(k-1)}, \frac{2k-3}{2(k-1)}, \frac{1}{2}\right)$.

<u>**CASO 2**</u>. Se $k = 0$ allora si ottiene la matrice a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso la matrice dei coefficienti e la matrice orlata hanno entrambe rango 2. Quindi, per il teorema di Rouché–Capelli, il sistema è compatibile ed ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Scegliendo Z come variabile libera, otteniamo che per $k = 0$ l'insieme delle soluzioni è

$$S_0 = \{(-t, 2-t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

<u>**CASO 3**</u>. Se $k = 1$ allora si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando l'ulteriore operazione $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$, si ottiene la matrice a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che l'ultima riga corrisponde all'equazione $0 = 1$, pertanto il sistema è incompatibile.

ESERCIZIO 3 [8 punti]. **Una famiglia di endomorfismi di $\mathbb{R}^3$.**

(a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W su un campo K. Si definiscano il nucleo e l'immagine di f. Quindi si enunci il teorema del rango.

Definizione e Teorema

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Il nucleo di f è il sottoinsieme di V, denotato $\ker(f)$, definito da

$$\ker(f) := \{v \in V : f(v) = 0_W\}.$$

L'immagine di f è il sottoinsieme di W, denotato $\mathrm{Im}(f)$, definito da

$$\mathrm{Im}(f) := \{f(v) : v \in V\}.$$

Teorema del rango. Siano V e W due spazi vettoriali su un campo K tali che V è di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare, allora

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(V),$$

dove $\dim(\ker(f))$ denota la dimensione del nucleo di f e $\mathrm{rg}(f)$ la dimensione dell'immagine di f.

(b) Siano V e W due spazi vettoriali di dimensioni rispettivamente m e n e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Si mostri che se $m > n$, allora f non è iniettiva.

Dimostrazione

Innanzitutto ricordiamo che $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio vettoriale di W. Quindi $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq n$. Applicando il teorema del rango abbiamo:

$$\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = m - \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq m - n > 0.$$

Abbiamo quindi ottenuto che $\dim(\ker(f)) > 0$. Ciò implica che $\ker(f) \neq \{0_V\}$, ovvero che f non è iniettiva.

(c) Si consideri l'endomorfismo

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x+2y-2z, 3x+2z, 3x-y+3z). \end{array}$$

(c1) Si determini se f è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base diagonalizzante.

Svolgimento

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. La matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per studiare la diagonalizzabilità di f, determiniamo innanzitutto gli autovalori, calcolando le radici del polinomio caratteristico:

$$P_f(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 2 & -2 \\ 3 & -T & 2 \\ 3 & -1 & 3-T \end{vmatrix} = -T^3 + 2T^2 + T - 2 = -T^2(T-2) + T - 2 =$$
$$= (1-T^2)(T-2) = (1+T)(1-T)(T-2).$$

Pertanto gli autovalori di f sono $-1, 1$, e 2. Essendo gli autovalori a due a due distinti, possiamo già concludere che f è diagonalizzabile. Non rimane che determinare per ciascun autovalore l'autospazio corrispondente:

- $V_{-1}(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(-1,1,1)\}.$

- $V_1(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(1,-1,-2)\}.$

- $V_2(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(0,1,1)\}.$

Sia $\mathcal{B}' = \{(-1,1,1), (1,-1,-2), (0,1,1)\}$ l'unione delle basi dei tre autospazi $V_{-1}(f)$, $V_1(f)$ e $V_2(f)$. Allora $\mathcal{B}'$ è una base diagonalizzante per f.

(c2) Sia A la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Si determini una matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale e si calcoli P^{-1}. Cosa si ottiene effettuando il prodotto $P^{-1}AP$?

Svolgimento

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{B}' = \{(-1,1,1),(1,-1,-2),(0,1,1)\}$ la base diagonalizzante trovata al punto (c1). Allora una matrice P tale che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale è

$$P = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si può calcolare l'inversa di P con uno dei metodi visti in classe (sistema lineare, algoritmo di Gauss–Jordan o la matrice cofattore) e si ottiene

$$P^{-1} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effettuando il prodotto $P^{-1}AP$ si ottiene:

$$P^{-1}AP = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 4 [6 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano $\pi \subseteq \mathbb{E}^3$ passante per i punti $A(1,1,0)$, $B(0,0,1)$ e $C(0,2,0)$.

Svolgimento

Per scrivere le equazioni parametriche di π abbiamo bisogno di un punto del piano e di due vettori non collineari della giacitura. Scegliamo:

- Punto: $B(0,0,1)$;
- Vettori non collineari della giacitura: $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$.

Quindi

$$\pi : \begin{cases} x = -s - t \\ y = -s + t \\ z = s + 1 \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana di π ricaviamo s e t dalla seconda e dalla terza equazione e le sostituiamo nella prima:

$$\begin{cases} x = -s - t \\ t = s + y \\ s = z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -s - t \\ t = z - 1 + y \\ s = z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z + 1 - z + 1 - y \\ t = z - 1 + y \\ s = z - 1 \end{cases}$$

Un'equazione cartesiana di π è quindi:

$$\pi : X + Y + 2Z - 2 = 0.$$

(b) Nel fascio di piani paralleli a π si determinino i piani a distanza 2 da π.

Svolgimento

Il fascio di piani paralleli a π è dato dall'equazione

$$\pi_d : X + Y + 2Z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo i valori di d tali che il piano corrispondente π_d del fascio sia a distanza 2 da π:

$$2 = d(\pi, \pi_d) = d(B, \pi_d) = \frac{|2+d|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{|2+d|}{\sqrt{6}}.$$

Basta allora risolvere l'equazione con modulo

$$|2+d| = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 2+d = 2\sqrt{6} \text{ o } 2+d = -2\sqrt{6} \Leftrightarrow d = 2\sqrt{6}-2 \text{ o } d = -2\sqrt{6}-2.$$

Quindi i piani cercati sono

$$\pi_{2\sqrt{6}-2} = X + Y + 2Z + 2\sqrt{6} - 2 \qquad \text{e} \qquad \pi_{-2\sqrt{6}-2} = X + Y + 2Z - 2\sqrt{6} - 2.$$

(c) Al variare di h in $\mathbb{R}$ si consideri la retta r_h descritta dalle equazioni cartesiane

$$r_h : \begin{cases} hX + Y + Z = 2 \\ X + hY + Z = h \end{cases}$$

e si determini la posizione reciproca di π e r_h. Inoltre, quando π e r_h sono incidenti, se ne determini il punto di intersezione.

Svolgimento

Ricordiamo che una retta e un piano possono essere paralleli (disgiunti o la retta contenuta nel piano) o incidenti. In particolare sono paralleli disgiunti se la loro intersezione è vuota, sono incidenti se la loro intersezione è costituita da un unico punto e la retta è contenuta nel piano se la loro intersezione è costituita da infiniti punti. Studiamo quindi, al variare di h, il numero delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} X + Y + 2Z = 2 \\ hX + Y + Z = 2 \\ X + hY + Z = h. \end{cases}$$

Notiamo che questo sistema, a meno dell'ordine delle equazioni e del simbolo scelto per il parametro, è esattamente il sistema che abbiamo risolto nell'Esercizio 2. Pertanto non ci resta che interpretare la soluzione trovata da un punto di vista geometrico. Abbiamo

- se $h \neq 0, 1$ il sistema possiede un'unica soluzione. Pertanto per tali valori π e r_h sono incidenti, e la loro intersezione è data dal punto $\left(\frac{1}{2(h-1)}, \frac{2h-3}{2(h-1)}, \frac{1}{2}\right)$.
- se $h = 0$ il sistema possiede ∞^1 soluzioni. Pertanto r_0 è contenuta in π.
- se $h = 1$ il sistema è incompatibile. Pertanto r_1 e π sono paralleli disgiunti.

ESERCIZIO 5 [6 punti]. **Sottospazi vettoriali e prodotto scalare.**

(a) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Si definisca quando un sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Un sottoinsieme $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V se:

- $W \neq \emptyset$;
- $\forall\ \lambda, \mu \in K$, $\forall\ w_1, w_2 \in W$ si ha $\lambda w_1 + \mu w_2 \in W$.

(b) Sia $\langle\,,\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^4$. Si mostri che il sottoinsieme

$$U = \{v \in \mathbb{R}^4 : \langle (1,1,0,1), v\rangle = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e se ne determini una base e la dimensione.

Svolgimento

Mostriamo che U soddisfa le proprietà di sottospazio vettoriale definite nel punto (a).

- $U \neq \emptyset$. Infatti $(0,0,0,0) \in U$, in quanto $\langle (1,1,0,1), (0,0,0,0)\rangle = 0$.
- Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e siano $v_1, v_2 \in U$. Allora $\langle (1,1,0,1), v_1\rangle = 0 = \langle (1,1,0,1), v_2\rangle$. Ma quindi, per le proprietà del prodotto scalare, si ha
$$\langle (1,1,0,1), \lambda v_1 + \mu v_2\rangle = \lambda\langle (1,1,0,1), v_1\rangle + \mu\langle (1,1,0,1), v_2\rangle = 0 + 0 = 0.$$
Ne segue che $\lambda v_1 + \mu v_2 \in U$.

Concludiamo che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Determiniamo ora una base e la dimensione di U. Abbiamo che

$$\begin{aligned} U &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \langle (1,1,0,1), (a,b,c,d)\rangle = 0\} = \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a + b + d = 0\} = \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = -b - d\} = \\ &= \{(-b-d, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b, c, d \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{b(-1,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(-1,0,0,1) : b, c, d \in \mathbb{R}\} = \\ &= Span\{(-1,1,0,0), (0,0,1,0), (-1,0,0,1)\}. \end{aligned}$$

Quindi una base di U è $\{(-1,1,0,0), (0,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$ e U ha dimensione 3.

(c) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = Span\{(-4,7,0,-3),(-2,5,1,-3),(0,1,1,-1),(-1,2,0,-1)\}.$$

Si determini una base e la dimensione di W.

Svolgimento

Per determinare una base e la dimensione di W ci basterà ridurre a gradini la matrice che ha per righe i quattro vettori che generano U:

$$\begin{pmatrix} -4 & 7 & 0 & -3 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_1 \leftrightarrow R_4$,
2. $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$,
3. $R_4 \leftarrow R_4 - 4R_1$,
4. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,
5. $R_4 \leftarrow R_4 + R_2$,
6. $R_3 \leftrightarrow R_4$.

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la dimensione di W è 3 (numero di righe non nulle) e una base è $\{(-1,2,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,0)\}$ (le righe non nulle della matrice ridotta a scalini).

(d) Si mostri che $U = W$.

Svolgimento

Per mostrare che $U = W$ basterà mostrare che $\dim(U + W) = 3$. Infatti $U + W$ è un sottospazio tale che $U \subseteq U + W$ e $W \subseteq U + W$. Essendo $\dim(U) = 3$ e $\dim(W) = 3$, se $\dim(U + W) = 3$ allora $U + W = U$ e $U + W = W$. Ma allora $U = W$.
Determiniamo quindi la dimensione di

$U+W = Span\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (-1, 2, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0)\}$

riducendo a gradini la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$,
2. $R_4 \leftarrow R_4 - R_1$,
3. $R_2 \leftrightarrow R_3$,
4. $R_4 \leftarrow R_4 + R_2$,
5. $R_5 \leftarrow R_5 + R_2$,
6. $R_5 \leftarrow R_5 - R_3$,
7. $R_6 \leftarrow R_6 - R_3$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\dim(U + W) = 3$, da cui segue che $U = W$.