Geometria e Algebra - MIS-Z

Quarto appello - Ottobre

16/10/2023

Nome e Cognome: ______________________

Corso di laurea: ______________________

Matricola: ______________________

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti (di cui 2 punti sono attribuiti in base alla qualità della redazione). Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.
Le risposte devono inoltre essere inserite negli appositi spazi bianchi e si potranno allegare fogli supplementari solo previa autorizzazione della docente.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Redazione	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) Il vettore $(2, 2)$ è combinazione lineare dei vettori $(2, -1)$ e $(-2, 2)$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(b) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

ha rango massimo.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(c) Esistono due sottospazi vettoriali U_1 e U_2 di $\mathbb{R}^3$ tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

□ **VERO**

□ **FALSO**

(d) Se 0 è un autovalore di un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, allora $\ker(f) \neq \{(0,0,0)\}$.

□ **VERO**

□ **FALSO**

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} kX + Y + Z = 2 \\ X + kY + Z = k \\ X + Y + 2Z = 2 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**

ESERCIZIO 3 [8 punti]. **Una famiglia di endomorfismi di $\mathbb{R}^3$.**

(a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W su un campo K. Si definiscano il nucleo e l'immagine di f. Quindi si enunci il teorema del rango.

(b) Siano V e W due spazi vettoriali di dimensioni rispettivamente m e n e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Si mostri che se $m > n$, allora f non è iniettiva.

(c) Si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-x+2y-2z, 3x+2z, 3x-y+3z). \end{array}$$

(c1) Si determini se f è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base diagonalizzante.

(c2) Sia A la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Si determini una matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale e si calcoli P^{-1}. Cosa si ottiene effettuando il prodotto $P^{-1}AP$?

ESERCIZIO 4 [6 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano $\pi \subseteq \mathbb{E}^3$ passante per i punti $A(1,1,0)$, $B(0,0,1)$ e $C(0,2,0)$.

(b) Nel fascio di piani paralleli a π si determinino i piani a distanza 2 da π.

(c) Al variare di h in $\mathbb{R}$ si consideri la retta r_h descritta dalle equazioni cartesiane

$$r_h : \begin{cases} hX + Y + Z = 2 \\ X + hY + Z = h \end{cases}$$

e si determini la posizione reciproca di π e r_h. Inoltre, quando π e r_h sono incidenti, se ne determini il punto di intersezione.

ESERCIZIO 5 [6 punti]. **Sottospazi vettoriali.**

(a) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Si definisca quando un sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale di V.

(b) Sia $\langle\, , \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^4$. Si mostri che il sottoinsieme

$$U = \{v \in \mathbb{R}^4 : \langle (1,1,0,1), v\rangle = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e se ne determini una base e la dimensione.

(c) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = Span\{(-4, 7, 0, -3), (-2, 5, 1, -3), (0, 1, 1, -1), (-1, 2, 0, -1)\}.$$

Si determini una base e la dimensione di W.

(d) Si mostri che $U = W$.