Geometria e Algebra - MIS-Z

Primo Esonero A - Soluzioni

02/05/2023

Nome e Cognome: ____________________

Corso di Laurea: ____________________

Matricola: ____________________

Informazioni

Questo esonero contiene 4 esercizi per un totale di 32 punti. Sia x il punteggio ottenuto nell'Esercizio 1 e sia y il punteggio totale ottenuto. Il compito è ritenuto sufficiente se $x \geq 5$ e $y \geq 18$. In tal caso il voto del primo esonero sarà dato da y.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 1 ora e 50 minuti. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	Punteggio

TOTALE

ESERCIZIO 1 [10 punti]. **Esercizio Scoglio.**

(a) Si determini se la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ è invertibile e in caso se ne determini l'inversa.

Giustificazione

Per determinare se A è invertibile, e eventualmente calcolarne l'inversa, utilizziamo l'algoritmo di Gauss–Jordan. Consideriamo la matrice $(A|I_2)$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Effettuando nell'ordine le operazioni $R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$, $R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$ e $R_1 \leftarrow -R_1$, otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi A è invertibile e l'inversa di A è $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Sia $n \geq 1$. Si definisca quando n vettori di un K-spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti.

Definizione

Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. I vettori $v_1, \ldots, v_n$ si dicono *linearmente indipendenti* se

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \underline{0},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

(c) Si stabilisca se l'asserto seguente è VERO o FALSO, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta:

Il sottoinsieme $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$ *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^2$.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Consideriamo i vettori $v_1 = (1, -1), v_2 = (1, 1) \in W$. Chiaramente $v_1, v_2 \in W$, poiché le loro componenti soddisfano la relatione $x^2 - y^2 = 0$. Ma $v_1 + v_2 = (2, 0)$ non appartiene a W, poiché $2^2 - 0 \neq 0$.

(d) Si stabilisca se l'asserto seguente è VERO o FALSO, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta:

Sia V *uno spazio di dimensione* 1 *e siano* $v_1, v_2 \in V$. *Allora* v_1 *e* v_2 *sono linearmente indipendenti.*

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

L'asserto è falso poiché contraddice il lemma di Steinitz.

(e) Si stabilisca se l'asserto seguente è VERO o FALSO, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta:

Sia $V = \mathbb{R}[X]$. *Allora* $X^2 \in Span\{X^2+1, X^2-X, X^2-2X-1\}$.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Determiniamo se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$a(X^2+1) + b(X^2-X) + c(X^2-2X-1) = X^2. \tag{1}$$

Dall'equazione (1) otteniamo l'uguaglianza di polinomi

$$(a+b+c)X^2 + (b-c)X - a - 2c = X.$$

Poiché due polinomi sono uguali se e solo se i coefficienti relativi a monomi dello stesso grado coincidono, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ -b-2c = 0 \\ a-c = 0. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione alla terza otteniamo

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ -b-2c = 0 \\ -b-2c = -1. \end{cases}$$

ovvero un sistema incompatibile. Di conseguenza tali a, b, c non esistono e $X^2 \notin Span\{X^2+1, X^2-X, X^2-2X-1\}$.

ESERCIZIO 2 [8 punti]. **Sistema con parametro.**
Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} X_1 + X_3 + X_4 = a \\ aX_2 + X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 + X_2 + 2aX_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 = 2 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

a	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**
$a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	SI	1	$\{(1, -1, -1, a)\}$
$a = 1$	SI	∞^2	$\{(1 - s - t, -s - t - 1, s, t)\,, s, t \in \mathbb{R}\}\,.$

Svolgimento

Consideriamo la matrice orlata associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2a & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$,
2. $R_4 \leftarrow R_4 - R_1$,
3. $R_2 \leftrightarrow R_4$,
4. $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$,
5. $R_4 \leftarrow R_4 + aR_2$,
6. $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$,
7. $R_4 \leftarrow R_4 + \frac{1}{2}R_3$,

si ottiene la matrice:

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2-a \\ 0 & 0 & 2a-2 & 0 & 2-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & a-a^2 \end{pmatrix}.$$

CASO 1. Se $a \neq 1$ allora la matrice B_a è a scalini: notriamo che l'ultimo pivot non appartiene all'ultima colonna e tutte le colonne delle incognite contengono un pivot. Ne segue che il sistema è compatibile ed ammette esattamente una soluzione. Quindi per ogni $a \neq 1$ l'insieme delle soluzioni è

$$S_a = \{(1, -1, -1, a)\}\,.$$

<u>**CASO 2**</u>. Se $a = 1$ allora abbiamo

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che B_1 è una matrice a scalini il cui ultimo pivot non appartiene all'ultima colonna. Quindi il sistema è compatibile. Possiamo scegliere X_3 e X_4 come variabili libere. Ne segue che il sistema possiede ∞^2 soluzioni che sono date dall'insieme

$$S_1 = \{(1 - s - t, -s - t - 1, s, t), s, t \in \mathbb{R}\}.$$

ESERCIZIO 3 [10 punti]. **Sottospazi di matrici.**

Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito da

$$U = Span\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right\}$$

e si consideri il sottoinsieme W di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici quadrate di ordine 2 i cui elementi sulla diagonale principale sono tutti nulli.

(a) Si mostri che W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se ne determini una base e la dimensione.

Svolgimento

Abbiamo:

$$W = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Mostriamo che W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$, poiché gli elementi della diagonale della matrice nulla sono uguali a zero.
- Siano dunque $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $A, B \in W$. Allora esistono $b_1, c_1, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Ma allora abbiamo:

$$\lambda A + \mu B = \lambda \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Segue che $\lambda A + \mu B$ appartiene a W, perché è una matrice con tutti zero sulla diagonale principale.

Concludiamo che W è un sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Determiniamo ora una base di W. Osserviamo che

$$W = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R}\right\} =$$
$$= Span\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Ne segue che le matrici $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ generano W. Inoltre sono linearmente indipendenti poiché sono due matrici della base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Quindi $\mathcal{B}_W = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è una base di W e $\dim(W) = 2$.

(b) Si determini una base e la dimensione di $U+W$.

Svolgimento

Osserviamo che una base di U è $\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$, poiché le matrici $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ generano U e non sono multipla l'una dell'altra.

Un sistema di generatori di $U+W$ è dato dall'unione delle basi di U e W:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per alleggerire la notazione denotiamo

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Estraiamo una base di $U+W$ da $\{B_1, B_2, A_1, A_2\}$. Si mostra facilmente che B_1, B_2 e A_1 sono linearmente indipendenti. Determiniamo se B_1, B_2, A_1 e A_2 sono linearmente indipendenti. Siano $\lambda, \mu, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\lambda B_1 + \mu B_2 + \delta A_1 + \gamma A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Da (2) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2\delta - 4\gamma = 0 \\ \lambda + \delta - 3\gamma = 0 \\ \mu - \delta + \gamma = 0 \\ \delta - 2\gamma = 0. \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che tale sistema possiede infinite soluzioni (si può anche notare che la prima e la quarta equazione sono linearmente dipendenti). Ne segue che B_1, B_2, A_1 e A_2 sono linearmente dipendenti. Quindi una base di $U+W$ è data da $\{B_1, B_2, A_1\}$ e $\dim(U+W) = 3$.

(c) Si determini una base e la dimensione di $U \cap W$.

Svolgimento

Per la formula di Grassmann abbiamo:

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Per determinare una base di $U \cap W$ basterà allora determinare una matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenente sia a U che a W.

Poiché $M \in W$, allora $a = d = 0$, ossia $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

Poiché $M \in U$, allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $M = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Dall'uguaglianza di matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

otteniamo il sistema nelle incognite b, c, λ, μ

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda - 4\mu \\ b = \lambda - 3\mu = 0 \\ c = -\lambda + \mu \\ 0 = \lambda - 2\mu. \end{cases} .$$

Risolvendo otteniamo le infinite soluzioni $\{(-\mu, -\mu, 2\mu, \mu) : \mu \in \mathbb{R}\}$, che corrispondono alle matrici $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}$, con $\mu \in \mathbb{R}$.

Questo significa che

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\} = Span \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e una base di $U \cap W$ è $\mathcal{B}_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(e) Per $a \in \mathbb{R}$, si consideri il sottospazio $V_a = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\right\}$. Si determini per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = (U+W) \oplus V$.

Svolgimento

Osserviamo che una base di V_a è $\mathcal{B}_{V_a} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\right\}$.
Abbiamo che $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = (U+W) \oplus V_a$ se e solo se $\mathcal{B}_{V_a} \cup \mathcal{B}_{U+W}$ è una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se e solo se le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.
Siano dunque $\lambda, \mu, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Da (3) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2\delta + \gamma = 0 \\ \lambda + \delta + \gamma = 0 \\ \mu - \delta + \gamma = 0 \\ \delta + a\gamma = 0. \end{cases}$$

Consideriamo la matrice orlata associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_2 \leftrightarrow R_1$,
2. $R_3 \leftrightarrow R_2$,
3. $R_4 \leftrightarrow R_3$,
4. $R_4 \leftarrow R_4 - 2R_3$,

si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema ha un'unica soluzione (ossia le matrici sono linearmente indipendenti) se e solo se $a \neq \frac{1}{2}$. Ne segue che $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = (U+W) \oplus V_a$ se e solo se $a \neq \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO 4 [4 punti]. **Un po' di teoria...**

(a) Enunciare il lemma di Steinitz.

Lemma

Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e siano $w_1, \dots, w_m \in V$. Se $w_1, \dots, w_m$ sono linearmente indipendenti, allora $m \leq n$.

(b) Dimostrare che se $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ sono due basi di uno spazio vettoriale V allora $n = m$.

Dimostrazione

Applichiamo il lemma di Steinitz da due punti di vista diversi:

- Poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base e $w_1, \dots, w_m$ sono linearmente indipendenti, allora, applicando il lemma di Steinitz, otteniamo che $m \leq n$;
- Poiché $\{w_1, \dots, w_m\}$ è una base e $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, allora, applicando il lemma di Steinitz, otteniamo che $n \leq m$.

Quindi $m \leq n$ e $n \leq m$, da cui $m = n$.