# Geometria e Algebra - MIS-Z

## Primo Esonero

02/05/2023

Nome e Cognome: ____________________

Corso di Laurea: ____________________

Matricola: ____________________

**Informazioni**

Questo esonero contiene 4 esercizi per un totale di 32 punti. Sia $x$ il punteggio ottenuto nell'Esercizio 1 e sia $y$ il punteggio totale ottenuto. Il compito è ritenuto sufficiente se $x \geq 5$ e $y \geq 18$. In tal caso il voto del primo esonero sarà dato da $y$.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 1 ora e 50 minuti. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

| **Esercizio** | **Punteggio** |
| --- | --- |
| | |
| | |
| | |
| | |

**TOTALE**

| |
| --- |
| |

**ESERCIZIO 1** [10 punti]. **Esercizio Scoglio.**

(a) Si determini se la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ è invertibile e in caso se ne determini l'inversa.

(b) Sia $n \geq 1$. Si definisca quando $n$ vettori di un $K$-spazio vettoriale $V$ sono linearmente indipendenti.

(c) Si stabilisca se l'asserto seguente è VERO o FALSO, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta:

*Il sottoinsieme* $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$ *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^2$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(d) Si stabilisca se l'asserto seguente è VERO o FALSO, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta:

*Sia* $V$ *uno spazio di dimensione* $1$ *e siano* $v_1, v_2 \in V$. *Allora* $v_1$ *e* $v_2$ *sono linearmente indipendenti.*

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(e) Si stabilisca se l'asserto seguente è VERO o FALSO, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta:

$$\textit{Sia } V = \mathbb{R}[X].\ \textit{Allora } X \in \textit{Span}\{X^2-1, X^2+X, X^2-X-2\}.$$

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

**ESERCIZIO 2** [8 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} X_1 + X_3 + X_4 = a \\ aX_2 + X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 + X_2 + 2aX_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 = 2 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

| $a$ | **Compatibile?** | **Numero di soluzioni** | **Insieme delle soluzioni** |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**ESERCIZIO 3** [10 punti]. **Sottospazi di matrici.**

Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito da

$$U = Span\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

e si consideri il sottoinsieme $W$ di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici quadrate di ordine 2 i cui elementi sulla diagonale principale sono tutti nulli.

(a) Si mostri che $W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se ne determini una base e la dimensione.

(b) Si determini una base e la dimensione di $U + W$.

(c) Si determini una base e la dimensione di $U \cap W$.

(d) Per $a \in \mathbb{R}$, si consideri il sottospazio $V_a = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\right\}$. Si determini per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = (U + W) \oplus V$.

**ESERCIZIO 4** [4 punti]. **Un po' di teoria...**

(a) Enunciare il lemma di Steinitz.

(b) Dimostrare che se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ sono due basi di uno spazio vettoriale $V$ allora $n = m$.