Esercizi

1 - Campi e Spazi Vettoriali

Legenda:

😀 : *Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso*
🤔 : *Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci*
🤯 : *Non ci dormirò stanotte*

😀 **Esercizio 1.** Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con le operazioni di addizione e moltiplicazione definite nel modo seguente:

$$\begin{array}{rccclc} + : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \qquad & (a,b)+(c,d) := (a+c, b+d) \\ \star : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \qquad & (a,b)\star(c,d) := (ac, bd). \end{array}$$

Mostrare che $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ non è un campo, identificando almeno una proprietà di campo che non è soddisfatta dalle operazioni $+$ e $\star$.

🤔 **Esercizio 2.** Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con le operazioni di addizione e moltiplicazioni definite nel modo seguente:

$$\begin{array}{rccclc} + : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \qquad & (a,b)+(c,d) := (a+c, b+d) \\ \triangle : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \qquad & (a,b)\triangle(c,d) := (ac-bd, ad+bc). \end{array}$$

Mostrare che $(\mathbb{R}^2, +, \triangle)$ è un campo. In particolare determinare l'elemento neutro rispetto a $+$, l'elemento neutro rispetto a $\triangle$, l'opposto di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ rispetto a $+$ e l'inverso di $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\text{elemento neutro di } +\}$ rispetto a $\triangle$.

🤔 **Esercizio 3.** Si consieri l'insieme $\mathbb{F}_3 := \{0,1,2\}$. Si definiscano due operazioni binarie interne

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 & \to & \mathbb{F}_3 \\ \cdot : & \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 & \to & \mathbb{F}_3 \end{array}$$

in modo tale che $(\mathbb{F}_3, +, \cdot)$ sia un campo.

Esercizio 4. Consideriamo su $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ le operazioni seguenti:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a + b := ab \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+, \lambda \cdot a := a^\lambda$$

Si noti che l'operazione $+$ non è altro che la moltiplicazione usuale di numeri reali. Mostrare che $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale reale.

Esercizio 5. Sia V l'insieme delle funzioni <u>continue</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Consideriamo le operazioni $+$ e $\cdot$ su V definite nel modo seguente:

$$\forall\, f, g \in V, \quad f + g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array}$$

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ f \in V, \quad \lambda \cdot f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

Mostrare che $(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale reale procedendo per i seguenti step:

(1) Mostrare che il risultato di $+$ e $\cdot$ appartiene a V.

(2) Mostrare che $+$ e $\cdot$ verificano le 8 proprietà di spazio vettoriale. Durante la discussione sottolineare i punti in cui si utilizzano le proprietà di $\mathbb{R}$ come campo.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale su K.

(a) Siano $\lambda \in K$ e $v \in V$ tali che $\lambda \cdot v = \underline{0}$. Dimostrare che $\lambda = 0$ o $v = \underline{0}$.

(b) Siano $\lambda, \mu \in K$ e $v \in V$, $v \neq \underline{0}$, tali che $\lambda \cdot v = \mu \cdot v$. Dimostrare che $\lambda = \mu$.