Esercizi

2 - Vettori numerici e Matrici

Legenda:

😀 : *Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso*
🤔 : *Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci*
🤯 : *Non ci dormirò stanotte*
👩‍💻👨‍💻 : *Quanto ci piace programmare!*

😀 **Esercizio 1.** Siano $\mathbf{v} = (1, 2)$, $\mathbf{w} = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Determinare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = (1, 0).$$

(b) Mostrare che $\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = (0, 0)$ se e solo se $\lambda = \mu = 0$.

(c) Dimostrare che per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = (a, b).$$

In particolare determinare λ e μ in funzione di a e b.

😀 **Esercizio 2.** Si considerino le matrici seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si effettuino, quando possibile, le operazioni seguenti:

(a) $(B - A)C$.

(b) $(A + B)^2$.

(c) $-5AD$.

(d) $CD + EA$.

(e) ECD.

(f) $A^T BC$.

(g) $A^3 + I_3$.

😀 **Esercizio 3.** Una matrice $N \in \mathcal{M}_n(K)$ si dice *nilpotente* se esiste un intero $k \geq 1$ tale che $N^k = O_n$, dove $O_n \in \mathcal{M}_n(K)$ è la matrice nulla. Dimostrare che per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

è nilpotente.

🤔 **Esercizio 4.**

(😀) Determinare, se esiste, l'inversa della matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Se esiste, verificare che il risultato ottenuto è corretto.

(🤔) Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice avente almeno una riga nulla, cioè tale che $\exists\ i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $a_{ij} = 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$. Dimostrare che A <u>non</u> è invertibile.

🤔 **Esercizio 5.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(😀) Si calcolino A^2, A^3 e A^4.

(🤔) Per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, si determinino i coefficienti di A^k (in funzione di k) e si dimostri l'asserto utilizzando il principio di induzione.

🤔 **Esercizio 6.**

(😀) Mostrare che per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

è ortogonale.

(🤯) Si dimostri che una matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è ortogonale se e solo se è della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 = 1$. (Si noti che essendo l'enunciato della forma *se e solo se* ci sono due implicazioni da dimostrare.)

Se ne deduca, infine, che tutte le matrici ortogonali in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sono della forma

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

🧑‍💻 Esercizi facoltativi per chi ama programmare 🧑‍💻

Nel linguaggio di programmazione preferito si svolgano gli esercizi seguenti.

Si noti che ad esempio in Python un vettore di $\mathbb{R}^n$ può essere rappresentato come una lista di lunghezza n, mentre una matrice di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ come una lista di lunghezza m di liste di lunghezza n.

Esempio

- $v = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow [1, 2, 3, 4]$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \longrightarrow [[1, 2, 3], [4, 5, 6]]$

1) Scrivere una funzione **somma_vettori(**v, w**)** che dati due vettori v, w restituisce il vettore somma $v + w$, quando è possibile calcolarlo, e FALSE altrimenti.

2) Scrivere una funzione **identità(**n**)** che per ogni intero $n \geq 1$ restituisce la matrice identità I_n.

3) Scrivere una funzione **somma_matrici(**A, B**)** che date due matrici A, B restituisce la matrice $A + B$, quando è possibile calcolarla, e FALSE altrimenti.

4) Scrivere una funzione **trasposta(**A**)** che, data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, restituisce la matrice trasposta A^T.

5) Scrivere una funzione **test_simmetrica(A)** che restituisce TRUE se la matrice A è simmetrica e FALSE altrimenti.

   Si testi la funzione con le matrice seguenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 3 & 7 & 11 \\ 8 & 11 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 3 & 7 & 11 \\ -8 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

6) Scrivere una funzione **prodotto_matrici(**A, B**)** che date due matrici A, B restituisce la matrice AB, quando è possibile calcolarla, e FALSE altrimenti.

7) Scrivere una funzione **test_ortogonale(A)** che restituisce TRUE se la matrice A è ortogonale e FALSE altrimenti.

   Si testi la funzione con le matrice seguenti

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$