## Esercizi
3 - Sistemi Lineari

**Legenda**:

😀 : *Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso*
🤔 : *Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci*
🤯 : *Non ci dormirò stanotte*
👩‍💻👨‍💻 : *Quanto ci piace programmare!*

😀 **Esercizio 1.** Ognuna delle matrici seguenti è la matrice orlata di un sistema lineare. Per ognuna di esse si determini se il sistema corrispondente è compatibile e, in caso affermativo, si trovi l'insieme delle soluzioni. (Si noti che tutte le matrici sono a scalini.)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha+3 \end{pmatrix}, \text{ al variare di } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-2k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^3-4k \end{pmatrix}, \text{ al variare di } k \in \mathbb{R}.$$

😀 **Esercizio 2.** Risolvere i seguenti sistemi lineari utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss–Jordan.

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} X_1 + 2X_3 + X_4 = 8 \\ 2X_1 + 3X_2 - X_3 - 2X_4 = -2 \\ -X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 3X_4 = -1 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4 \end{cases}$$

(b) $\begin{cases} X_3 + 2X_4 + 4X_5 = 1 \\ 3X_1 + 2X_2 - 5X_3 + X_4 = 0 \\ -2X_2 + 4X_4 + 2X_5 = 9 \\ -3X_1 - 2X_2 + 5X_3 - X_4 - X_5 = 9 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 5 \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 5X_4 = 8 \\ 2X_3 - 2X_4 = 3 \end{cases}$

**Esercizio 3.** Al variare del/dei parametro/i si discuta la compatibilità del sistema. Per ogni sistema compatibile si determini il "numero" e l'insieme delle soluzioni (in funzione del/dei parametro/i).

(a) $\begin{cases} X + Y + hZ = 0 \\ X + hY + Z = 0 \\ hX + Y + Z = 0 \end{cases}, \quad h \in \mathbb{R}.$

(b) $\begin{cases} kX_1 + kX_2 - kX_3 = 0 \\ -X_3 + 2X_4 = -3 \\ kX_1 + kX_2 - (k+1)X_3 + (k+5)X_4 = k - 3 \\ X_1 + X_2 - X_3 = k^2 + 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$

(c) $\begin{cases} \alpha X_1 + X_2 + 5X_3 = 2 \\ -\alpha X_1 + (\alpha+1)X_2 + (\alpha-5)X_3 - 3X_4 - X_5 = -1 \\ \alpha X_4 + X_5 = 2 \\ -2\alpha X_1 - 2X_2 + (\alpha-11)X_3 - 2X_5 = -4 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

(d) $\begin{cases} bY + Z = 1 \\ X + Y + Z = a + b \\ X + (b+1)Y + (a+3)Z = 1 + a + 2b \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$

**Esercizio 4.** Sia:

$$(\star) \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

un sistema lineare e sia

$$(\star\star) \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots a_{1n}X_n = 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots a_{2n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots a_{mn}X_n = 0 \end{cases}$$

il corrispondente sistema omogeneo. Siano $S$ e $S_0$ gli insiemi delle soluzioni rispettivamente di $(\star)$ e $(\star\star)$ e sia $(x_1, \ldots, x_n) \in S$.

Si dimostri che

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) : (y_1, \dots, y_n) \in S_0\},$$

ovvero che ogni soluzione di un sistema lineare si può scrivere come la somma di una soluzione *particolare* del sistema e di una soluzione del sistema omogeneo corrispondente.

🤯 **Esercizio 5.** Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. È possibile mostrare che ogni operazione elementare sulle righe di $A$ corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per una matrice invertibile, ottenuta dalla matrice identità $I_m$ effettuando su di essa l'operazione corrispondente (una tale matrice è detta *matrice elementare)*.

Ad esempio, scambiare la prima e la terza riga di una matrice $3 \times 3$ corrisponde a moltiplicare a sinistra per la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ottenuta scambiando la prima e la terza riga della matrice identità $I_3$. Abbiamo ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(😀) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Si determinino delle matrici elementari $P_1, \dots, P_r$ tali che

$$P_r \cdots P_1 A = B,$$

dove $B$ è una matrice a scalini. (Una volta determintate $P_1, \dots, P_r$ si verifichi che effettivamente il prodotto $P_r \cdots P_1 A$ è uguale a una matrice a scalini.)

(🤯) Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$ una matrice quadrata. Dimostrare che se effettuando l'algoritmo di Gauss–Jordan su $A$ si ottiene una matrice con almeno una riga nulla, allora $A$ non è invertibile. *(Indizio: si utilizzi il punto (🤔) dell'esercizio 4 del secondo foglio di esercizi...)*

😀 **Esercizio 6.** Risolvere, quando possibile, i seguenti sistemi lineari con il metodo dell'inversa:

(a) $$\begin{cases} 3X - Y = 3 \\ 2Y - 3Z = -5 \\ X + Y - 2Z = -2, \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} X_1 + 2X_2 - 2X_3 + X_4 = 2 \\ -X_1 + 2X_3 = 0 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 = 2 \\ X_1 + 3X_2 + X_3 + X_4 = 3. \end{cases}$$

## 🧑‍💻 Esercizi facoltativi per chi ama programmare 👨‍💻

Nel linguaggio di programmazione preferito si svolgano gli esercizi seguenti.

1) Scrivere una funzione **moltiplica_riga**$(A, i, a)$ che data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, un intero $i \in \{1, \dots, m\}$ e uno scalare $a \in \mathbb{R}$ restituisce la matrice ottenuta da $A$ moltiplicando la riga $i$-esima per $a$ ($L_i \leftarrow aL_i$).

2) Scrivere una funzione **permuta_righe**$(A, i, j)$ che data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e due interi $i, j \in \{1, \dots, m\}$ restituisce la matrice ottenuta da $A$ scambiando la riga $i$-esima con la riga $j$-esima ($L_i \leftrightarrow L_j$).

3) Scrivere una funzione **sostituisci_riga**$(M, i, j, a)$ che data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e due interi $i, j \in \{1, \dots, m\}$ restituisce la matrice ottenuta da $A$ sostistuendo la riga $i$-esima con la somma della riga $i$-esima più $a$ volte la riga $j$-esima ($L_i \leftarrow L_i + aL_j$).

4) Scrivere una funzione **risolvi_sistema_scalini**$(A, b)$ che data una matrice a scalini $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $n$ pivots (non nulli) e un vettore colonna $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ calcola l'unica soluzione del sistema $AX = b$, dove $X$ è il vettore delle indeterminate.

   Si testi la funzione con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

5) Si implementi l'algoritmo di Gauss–Jordan, ossia si scriva una funzione **algoritmo_gauss**$(A)$ che data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ restituisca una matrice a scalini ottenuta effettuando delle operazioni elementari su $A$.

   Si testi la funzione con le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 0 & 1 & 12 \\ -3 & 0 & 27 & -10 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 1 & -1 & -13 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$