Esercizi

4 - Sottospazi vettoriali, Sistemi di generatori, Dipendenza lineare

Legenda:

😀 : *Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso*
🤔 : *Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci*
🤯 : *Non ci dormirò stanotte*

😀 **Esercizio 1.** Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi è un sottospazio vettoriale del corrispondente spazio vettoriale V indicato. Giustificare la risposta.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, x + 3, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.
(c) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x + 3, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
(d) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 4z = 0\}$.
(e) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, x^2 + y^2) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
(f) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(x, x, x, x) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x \leq 1\}$.
(g) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 1, 0)\}$.
(h) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 0 \right\}$.
(i) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = b + c = c + d = 0 \right\}$.
(j) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $W = \{f \in V : f(0) = 0\}$.

😀 **Esercizio 2.** Si considerino in $V = \mathbb{R}^3$ i sottospazi vettoriali

$$U = \{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}, \qquad W = \{(x, x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Si determini il sottospazio intersezione $U \cap W$.

🤔 **Esercizio 3.** Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Siano L e U i sottoinsiemi di V costituiti dalle matrici 2×2 rispettivamente triangolari inferiori e superiori. Mostrare che L e U sono due sottospazi vettoriali di V.
(b) Descrivere il sottospazio intersezione $D := U \cap L$.
(c) Determinare due sottospazi W_1 e W_2 di D tali che $D = W_1 \oplus W_2$.

😀 **Esercizio 4.** Sia $V = \mathbb{R}^4$ e siano

$$v_1 = (1, 0, -1, 0),\ v_2 = (0, 1, 2, -1),\ v_3 = (-2, 0, 0, 3),\ v_4 = (1, 1, 1, 1).$$

(a) Il vettore $v = (1, 0, 0, 0)$ è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 e v_4? In caso affermativo, determinare i coefficienti della combinazione lineare.

(b) I vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti? Giustificare la risposta.

(c) L'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$?

🤔 **Esercizio 5.** Sia $V = \mathbb{R}[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$.

(a) Mostrare che per ogni intero $n \geq 0$, $\mathbb{R}_{\leq n}[X] := \{P(X) \in \mathbb{R}[X] : \deg(P(X)) \leq n\}$ è uno sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[X]$.

(b) Quali tra i seguenti sottoinsieme di $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ è un sottospazio vettoriale? Giustificare la risposta.

- $U_1 = \{P(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] : P(1) = 0\}$.
- $U_2 = \{P(X) \in \mathbb{R}_{\leq 4}[X] : P(X) = P(-X)\}$.

(c) Siano $v_1 = X^3+4$, $v_2 = X^2-2X+2$, $v_3 = X^2-3X+8$, $v_4 = 3X^3+2X$ quattro vettori di $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$. Determinare se v_1, v_2, v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti.

(d) Siano v_1, v_2, v_3 e v_4 come al punto (c). È vero che $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$? Giustificare la risposta.

🤔 **Esercizio 6.** Sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano $v_1 = (-1, 2, 4), v_2 = (1, 6, 10)$.

(a) Determinare per quali $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(h, h+1, h+2) \in \langle v_1, v_2 \rangle$.

(b) Mostrare che $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle (1, 2, 3), (3, -2, -5) \rangle$.

🤔 **Esercizio 7.** Siano v_1, v_2, v_3 tre vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$.

(a) Mostrare che anche i vettori v_1, $v_1 + v_2$, $v_1 + v_2 + v_3$ sono linearmente indipendenti.

(b) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali i vettori $v_1 + av_2, v_2 + av_3, v_1 + av_3$ sono linearmente indipendenti.

🤔 **Esercizio 8.** Sia V uno spazio vettoriale su K. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vettori di V. Dimostrare le seguenti proposizioni:

(a) I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che v_i è combinazione lineare degli altri vettori.

(b) Se l'insieme $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ contiene il vettore nullo, allora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

(c) Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti allora $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti per ogni $1 \leq m < n$.

(d) Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti e $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in K$ sono tali che
$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$
allora $a_i = b_i$ per ogni $i = 1, \ldots n$.

(e) I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v_{i+1} \notin \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$.