

Esercizi

5 - BASI E DIMENSIONE

Legenda:

- 😊 : Un gioco da ragazzi, dopo aver riletto gli appunti del corso
😞 : Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci
😱 : Non ci dormirò stanotte

😊 **Esercizio 1.** Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^4 :

$$U = \langle (1, 2, -1, 2), (1, -2, 1, 0), (3, -4, 2, 1) \rangle,$$
$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 4x + 5y - 3z - 4t = 0\}.$$

- Determinare una base di U e una base di W e dedurne la dimensione di U e W .
- Determinare una base di $U+W$ e dedurne la dimensione di $U+W$.
- È vero che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$? In caso di risposta negativa, determinare una base di $U \cap W$ e la dimensione corrispondente.

😊 **Esercizio 2.** Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si consideri il sottospazio $U = \langle A, A^2, A^3, A^4 \rangle \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Determinare la dimensione e una base \mathcal{B}_U di U .
- Completare \mathcal{B}_U a una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Determinare un sottospazio $W \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $U \oplus W = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

😞 **Esercizio 3.** Si considerino i seguenti vettori di \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (0, 1, k - 12), \quad v_3 = (3, 4, k).$$

- Si stabilisca per quali valori del parametro k i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di \mathbb{R}^3 .
- Determinare per quale valore di k il vettore $(10, 16, 4)$ ha coordinate $(1, 2, 3)$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

 **Esercizio 4.** Sia $\mathbb{R}_{\leq n}[X] := \{P(X) \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq n\}$. Per convenzione poniamo $\deg(0) = -1$. Abbiamo quindi che il polinomio nullo 0 appartiene a $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$.

- Mostrare che $\{1, x, x^2, x^3\}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$. Dedurne la dimensione di $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$.
- Più in generale, determinare per ogni $n \geq 0$ una base di $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$ e dedurne la dimensione di $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$.
- Dimostrare che $\mathbb{R}[X]$ non possiede una base finita (cioè con un numero finito di elementi). In particolare questo mostra che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[X]$ non ha dimensione finita.

 **Esercizio 5.** Consideriamo le seguenti matrici di $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tali matrici sono dette *matrici di Pauli* e sono spesso utilizzate in meccanica quantistica.

- Mostrare che $\{I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ è una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, dove I_2 è la matrice identità.
- Calcolare le coordinate in tale base delle matrici

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

 **Esercizio 6.** Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V e siano \mathcal{B}_U e \mathcal{B}_W due basi rispettivamente di U e W .

- Utilizzando la formula di Grassmann si dimostri che $U \cap W = \{0\}$ se e solo se $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una base di $U + W$.
- Si deduca da (a) che $V = U \oplus W$ se e solo se $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una base di V .